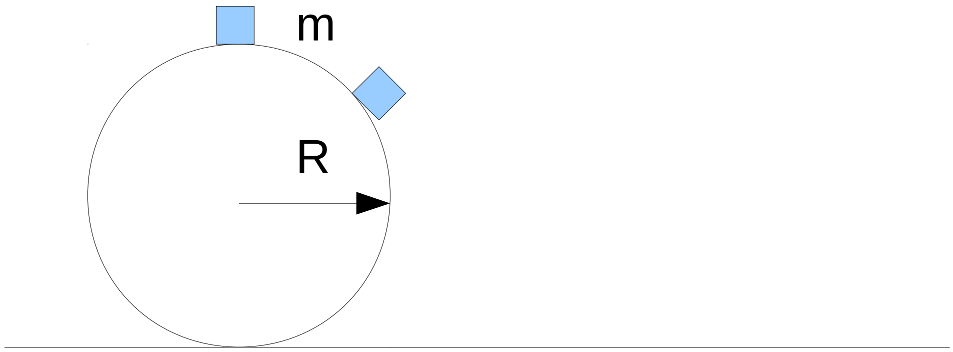
Physik Mechanik - Aufgaben zu Energie und Kreisbewegungen

Körper auf Zylinder

Rutschen auf einem Zylinder

Ein Körper rutscht auf einem Zylinder herunter, bis dieser abhebt. Der Körper verläßt somit seine Kreisbahn auf dem Zylinder nicht erst an der steilsten (senkrechten) Stelle sondern früher.



Lösungshilfen

1. Energieansatz für die Geschwindigkeit;
2. Winkelabhängigkeit;
3. Fliehkräfte und Gewichtskraft;

Lösung:

Es gilt die Energieerhaltung, d.h. die Summe aller Energien ist gleich und daraus kann in Abhängigkeit auf der Position auf der Kreisbahn die Geschwindigkeit berechnet werden.

$$\sum E_{Postion1} = \sum E_{Postition2}$$

$$E_{kin,P1} + E_{pot,P1} = E_{kin,P1} + E_{pot,P1}$$

$$\frac{1}{2} m v_1^2 + m g h_1 = \frac{1}{2} m v_2^2 + m g h_2$$

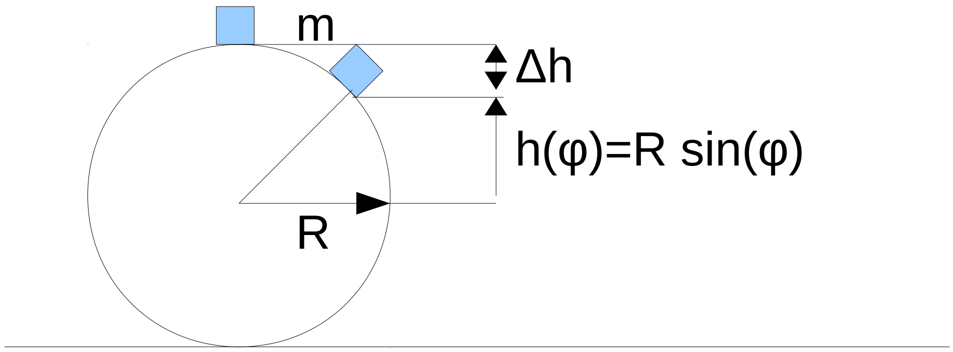
Um die Berechnungsaufwand gering zu halten, sei zunächst die die Anfangsgeschwindigkeit mit Null angenommen.

Damit das Koordinatensystem etwas einfacher wird, legen wir den Ursprung des Koordinatensystems für die weiteren Gleichungen auf den Mittelpunkt des Zylinders. In dem Falle ist die Höhe für die potentielle Energie :

$$h(\varphi)=R\cdot\sin(\varphi)$$

Es sind auch andere Parameterisierungen möglich.

$$h(\varphi)=R\cdot\cos(\pi/2+\varphi) \qquad \cos(\pi/2+\varphi)=\cos(\pi/2-\varphi)$$



Für die Geschwindigkeit folgt daher:

$$\frac{1}{2}m\cdot 0^2+m\,g\,R\cdot\underbrace{\sin(\varphi=\pi/2)}_{=1}=\frac{1}{2}m\,v_2^2+m\,g\,R\cdot\sin(\varphi)$$

$$m\,g\,R=\frac{1}{2}m\,v_2^2+m\,g\,R\cdot\sin(\varphi)$$

$$g\,R=\frac{1}{2}v_2^2+g\,R\cdot\sin(\varphi) \qquad \frac{1}{2}v_2^2=g\,R-g\,R\cdot\sin(\varphi)$$

$$v_2^2=2\,g\,R(1-\sin(\varphi))$$

Im oberen Punkt würde der Körper abheben, wenn die Fliehkräfte größer wären, als die Gewichtskraft des Körpers. Wenn der Körper bereits so weit gerutscht ist, dass eine Schräglage auf dem Zylinder vorliegt, dann gilt dies prinzipiell auch. Nur ist in dem Falle die Gewichtskraft mit einem winkelabhängigen Faktor zu multiplizieren, d.h. radiale Komponente oder senkrechte Komponente zur Tangente an den Kreis.

$$\frac{m\,v^2}{R}=m\,g\cdot\sin(\varphi)$$

$$\frac{v^2}{R}=g\cdot\sin(\varphi)$$

Schnell noch die andere Gleichung etwas umgeformt:

$$v_2^2=2\,g\,R(1-\sin(\varphi))$$

$$\frac{v_2^2}{R}=2\,g(1-\sin(\varphi))$$

Gleichgesetzt:

$$g \cdot \sin(\varphi) = 2g(1 - \sin(\varphi))$$

$$\sin(\varphi) = 2(1 - \sin(\varphi))$$

$$3\sin(\varphi) = 2$$

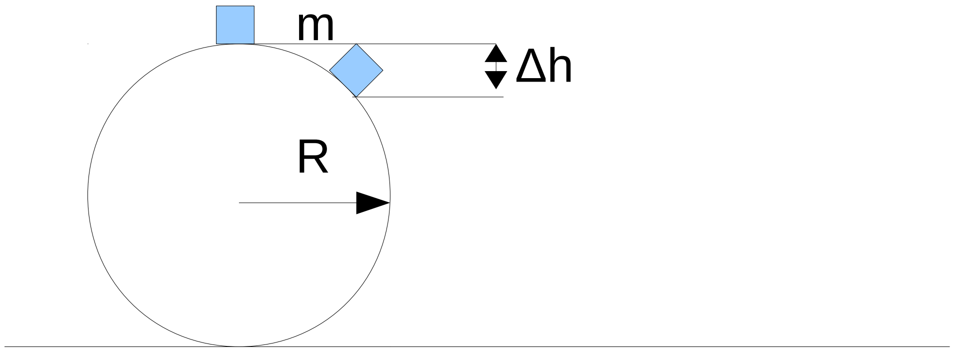
$$\sin(\varphi) = \frac{2}{3}$$

Oder in Abhängigkeit von R ausgedrückt:

$$\sin(\varphi) = \frac{R - \Delta h}{R}$$

$$\frac{2}{3} = \frac{R - \Delta h}{R}$$

$$\Delta h = \frac{1}{3} R$$



Variation der Aufgabe mit einem zweiten Rollkörper, statt eines Massepunktes.

Der zweite Rollkörper sei ein Vollzylinder.

Lösungshilfen

1. Energieansatz für die Geschwindigkeit;
2. Rotationsenergie, Satz von Steiner ja oder nein;
3. Winkelabhängigkeit;
4. Fliehkräfte und Gewichtskraft;

Lösung:

Es gilt die Energieerhaltung, d.h. die Summe aller Energien ist gleich und daraus kann in Abhängigkeit auf der Position auf der Kreisbahn die Geschwindigkeit berechnet werden.

$$\sum E_{Postion1}=\sum E_{Postition2}$$

$$E_{kin,P1}+E_{pot,P1}=E_{kin,P1}+E_{pot,P1}$$

$$\frac{1}{2}m v_1^2+m g h_1=\frac{1}{2}m v_2^2+m g h_2+\frac{1}{2}J_{ges}\omega^2$$

Um die Berechnungsaufwand gering zu halten, sei zunächst die die Anfangsgeschwindigkeit mit Null angenommen.

Damit das Koordinatensystem etwas einfacher wird, legen wir den Ursprung des Koordinatensystems für die weiteren Gleichungen auf den Mittelpunkt des Zylinders. In dem Falle ist die Höhe für die potentielle Energie :

$$h(\varphi)=R\cdot\sin(\varphi)$$

Es sind auch andere Parameterisierungen möglich.

$$h(\varphi)=R\cdot\cos(\pi/2+\varphi) \qquad \cos(\pi/2+\varphi)=\cos(\pi/2-\varphi)$$

Beim Vollzylinder, der auf dem großen Zylinder abrollt, gilt: $J_{ges}=\underbrace{\frac{m}{2}\cdot R^2}_{\text{Vollzylinder}}+\underbrace{m\cdot R^2}_{\text{Satz von Steiner}}$

Für den Verkoppelung der Winkelgeschwindigkeit mit der Geschwindigkeit v gilt:

$$\omega=\frac{v}{R} \qquad \omega^2=\frac{v^2}{R^2}$$

Für die Geschwindigkeit folgt daher:

$$\frac{1}{2}m\cdot 0^2+m g R\cdot\underbrace{\sin(\varphi=\pi/2)}_{=1}=\frac{1}{2}m v_2^2+m g R\cdot\sin(\varphi)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}mR^2+mR^2\right)\frac{v_2^2}{R^2}$$

$$m g R=\frac{1}{2}m v_2^2+m g R\cdot\sin(\varphi)+\frac{3}{4}m v_2^2$$

$$g R=\frac{5}{4}v_2^2+g R\cdot\sin(\varphi) \qquad \frac{5}{4}v_2^2=g R-g R\cdot\sin(\varphi)$$

$$v_2^2=\frac{4}{5}g R(1-\sin(\varphi))$$

Im oberen Punkt würde der Körper abheben, wenn die Fliehkräfte größer wären, als die Gewichtskraft des Körpers. Wenn der Körper bereits so weit gerutscht ist, dass eine Schräglage auf dem Zylinder vorliegt, dann gilt dies prinzipiell auch. Nur ist in dem Falle die Gewichtskraft mit einem winkelabhängigen Faktor zu multiplizieren, d.h. radiale Komponente oder senkrechte Komponente zur Tangente an den Kreis.

$$\frac{m v^2}{R} = m g \cdot \sin(\varphi)$$

$$\frac{v^2}{R} = g \cdot \sin(\varphi)$$

Schnell noch die andere Gleichung etwas umgeformt:

$$v_2^2 = \frac{4}{5} g R (1 - \sin(\varphi))$$

$$\frac{v_2^2}{R} = \frac{4}{5} g (1 - \sin(\varphi))$$

Gleichgesetzt:

$$g \cdot \sin(\varphi) = \frac{4}{5} g (1 - \sin(\varphi))$$

$$\sin(\varphi) = \frac{4}{5} (1 - \sin(\varphi))$$

$$\frac{9}{5} \sin(\varphi) = \frac{4}{5}$$

$$\sin(\varphi) = \frac{4}{9}$$

Oder in Abhängigkeit von R ausgedrückt:

$$\sin(\varphi) = \frac{R - \Delta h}{R}$$

$$\frac{4}{9} = \frac{R - \Delta h}{R}$$

$$\Delta h = \frac{5}{9} R$$

Die Herausforderungen bei diesen Aufgabentypen sind:

- Satz von Steiner anzuwenden.
- Die Übersetzungen zwischen den Winkelgeschwindigkeiten und Translationsgeschwindigkeiten zu erkennen und als Faktoren zu berücksichtigen.