Berechnungen zum E-Bike/Pedelec

Autor: Dieter Drewanz
Begonnen: Oktober 2014
Stand: 14.06.15

Inhaltsverzeichnis

1 Kräfte, die das Radfahren so mühsam werden lassen....2
1.1 Ein kleines Vorwort....2
1.2 Fahrwiderstände und der Kraftaufwand....2
1.3 Steigungen aus der Praxis....2
1.3.1 Kräfte und Momente....2
1.3.2 Leistungen und Arbeit....6
2 Höhendifferenzen....8
3 Fahrtwiderstandsanteile durch Rollen und Wind....9
3.1 Rollwiderstand....9
3.2 Luftwiderstand....10
4 Bewegungsenergie oder kinetische Energie....11
5 Antriebssysteme....14
5.1 Pedelec und E-Bike....14
5.2 Antriebsarten....15
5.3 Kennlinien von Antrieben und Dimensionierungseinflüsse....17
6 Simulationsansätze....19
6.1 Beschleunigung ohne Fahrwiderstände (Verluste)....19
6.2 Beschleunigung mit Rollwiderstand....22
6.3 Beschleunigung mit Steigungswiderstand....23
6.4 Beschleunigung mit Luftwiderstand....24
6.5 Kombination aller Fahrwiderstände....26
7 Messung der eigenen Leistung und der Fahrwiderstände....28
7.1 Ermittlung der eigenen Pedalleistung....28
7.2 Ermittlung der Fahrwiderstände eines Rades....29
8 Streckenmessung für eine Simulationsverwendung....30
8.1 Verwendung selbstaufgezeichneter Streckendaten....30
8.2 Kombination mehrerer Streckenmessungen....33
8.3 Berücksichtigung der Antriebssystemeigenschaften....33
9 Der Nutzbremsbetrieb bzw. Rekuperation....34
9.1 Nutzbremsfahrt bei einer Bergfahrt mit Wirkungsgradbetrachtung....34
9.2 Technische Zusammenhänge bei der Rückspeisung....37
9.3 Berechnungen zum Bergabwärtsrollen....39
10 Interessante Entwicklungen....44
10.1 Radfelgenmotor und Reibradmotor....44
10.2 Getriebeloser Mittenmotorantrieb....47
10.3 Gebrauchtmarkt für Pedelecs....48
11 Zusammenfassung....48

1 Kräfte, die das Radfahren so mühsam werden lassen

1.1 Ein kleines Vorwort

Mittlerweile ist das Dokument auf mehrere Seiten und Kaptel angewachsen. Einige Kapitel verwenden als Modell ein ideales Pedelec mit nur geringen Verlusten andere Kapitel beziehen sich auf reale Durchschnittswirkungsgrade. Gegenüber einem kommerziellen Fachbuch, bei dem man zurecht mehr Sorgfalt verlangen müßte das Thema besser geordnet zu präsentieren, bitte ich hier um etwas Nachsicht. Natürlich wurde das Dokument auch nicht entsprechend intensiv unter mehereren Gesichtspunkten (Didaktik, Rechtschreibung, Grammatik und Fehler) korrekturgelesen. Schließlich erhalte ich für das Dokument auch keinen Cent. Entstanden sind ettliche Kapitel dadurch, dass ich Skizzen, Berechnungen, Tabellen von Diskussionen niederschrieb. Die Tabellenkalkulations-anwendungen (Excel, OpenOfffice, Gnumeric) leisteten für die Darstellung gute Dienste und in beschränktem Maße ließen sich kleine Simulationen durchführen.

Zur Vereinfachung wird zunächst nicht zwischen Fahrrad, Pedelec, E-Bike unterschieden. Die Physikhintergründe zu den Effekten wird aufgezeigt und manchmal auch mehr oder weniger umgangssprachlich exakt verwendet. Die aufgeführten Beispiele dienen zur Verdeutlichung der jeweiligen physikalischen und technischen Effekte. Die Zusammenstellung soll keinen Literaturpreis gewinnen. Daher ist der Text sprachlich einfach gehalten und enthält auch einfache Reihungen und Exkurse, so dass der rote Faden nicht immer so klar ersichtlich ist.

1.2 Fahrwiderstände und der Kraftaufwand

Ein nur durch die Muskelkraft angetriebenes Fahrrad, E-Bike oder Pedelec erfordert einen nicht unerheblichen Kraftaufwand bei der Fortbewegung. Wird statt oder zusätzlich zur Muskelkraft ein Motor für den Antrieb eingesetzt, muss dieser genügend Leistung und Kraft aufbringen um diese Fahrwiderstände als spürbare Erleichterung oder gänzlich zu überwinden.

Wesentlich sind folgende Fahrwiderstandsursachen:

- Steigungen
- Beschleunigungen (Trägheit)
- Rollreibungen (Rad-Boden, Kette, Lager)
- Luftreibungen

Übrigens welcher Fahrwiderstand verursacht beim Radfahren den meisten Kraftaufwand und ist Schuld, dass man sich manchmal ganz schön plagen muss?

1.3 Steigungen aus der Praxis

1.3.1 Kräfte und Momente

Eine motorische Unterstützung soll sicherlich mindestens die Kraft aufbringen eine Tiefgaragenauffahrt hoch zu fahren. An der steilsten Stelle einer Tiefgarage einer Wohnung zeigt das Smartphone mit Hilfe einer Anwendung zur Winkelmessung einen Steigungswinkel von etwa 10 bis 11 Grad an. Auf einer Länge von ungefähr 22m werden etwa 3m Höhe überwunden. Somit ergibt sich eine durchschnittliche Steigung von 13,6% bzw. Steigungswinkel von 7,8°. An der steilsten Stelle wäre es nach der Messung ein Steigungswinkel von 11° bzw. eine Steigung von 19,5%. Gut zu sehen hier ist die Schwierigkeit eine Steigung ohne professionelles Vermessungsgerät zu bestimmen.

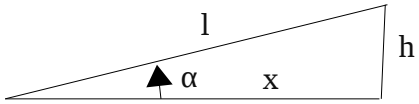
Steigung in %: $\frac{h}{x} \cdot 100\,\%$

Berechnung des Steigungswinkels:

$$\tan(\alpha) = \frac{h}{x}$$

$$\alpha = \arctan\left(\frac{h}{x}\right)$$

$$l = \sqrt{(x^2 + h^2)}$$



Näherung für kleine Winkel: $l \approx x$ (Fehler bei 20% Steigung beträgt ca. 2%)

Die Ablesung der Strecke auf einer topographischen Karte und auch der Abstand der Messpunkte eines Satellitennavigationsgerätes liefert als Abstand die Grundlinie x des Steigungsdreiecks.

Im Gegensatz hierzu liefert die Streckenmessung des Tachos oder Messung der tatsächlich bewegten Schrägen Strecke die Seite des Dreiecks mit Länge l. Wenn auf einer nicht ebenen Strecke das Satellitennavigationsgerät immer weniger Kilometer ermittelt als der Tachometer anzeigt, ist eine Ursache für den Unterschied der Fehler der sich aus der Verwendung von x oder l ergibt.

$$\sin(\alpha) = \frac{h}{l}$$

$$\alpha = \arcsin\left(\frac{h}{l}\right)$$

Bei einem Radgewicht von 20 kg und Fahrergewicht von 80 kg ergibt sich ein Gesamtgewicht von 100kg. Der runde Wert hat den Vorteil, dass für andere Gesamtgewichte (z.B. 120kg) die Ergebnisse leicht per Kopfrechnen bestimmt werden können. Für das Gesamtgewicht von 100kg und Verwendung der Näherung, dass für kleine Winkel das Steigungsverhältnis ungefähr dem Sinuswert des Winkels entspricht, ergibt sich bei 16% Steigung eine Hangabtriebskraft von 160N. Bei einem 26" Rad (Radius 32,5 cm gemessen, Felge plus Mantel) ergibt sich somit ein Drehmoment von 52 Nm (160N*0,325m). Damit das Rad nicht die Schräge herunter rollt, muss entweder eine Gegenkraft von 160N oder ein Drehmoment von 52 Nm aufgewendet werden.

Kräfte auf einer Schräge:

$$F_A = F_G \cdot \sin(\alpha)$$

$$F_G = (m_{Fahrer} + m_{Rad}) \cdot g$$

Näherung für kleine Winkel: $\sin(\alpha) \approx \tan(\alpha) \approx \frac{h}{x} \approx \frac{h}{l}$

Näherung für kleine Winkel: $F_A = F_G \cdot \sin(\alpha) \approx F_G \cdot \tan(\alpha) \approx F_G \cdot \frac{h}{x}$

Exakte Berechnung:

$$F_A = F_G \cdot \sin\left(\arctan\left(\frac{h}{x}\right)\right) = F_G \cdot \sin\left(\arcsin\left(\frac{h}{x}\right)\right) = F_G \cdot \frac{h}{l}$$

F: Kraft in N; m: Gesamtmasse in kg; g: Ortsfaktor 10 m/s^2 (genauer 9,81); F_A: Hangabtriebskraft; F_G: Gewichtskraft;

Moment am Hebelarm:

$$M = F \cdot R$$

M: Moment in Nm; F: Kraft in N, R: Radius (Hebelarm senkrecht zur Kraft) in m;

Steigung in %, Winkelfunktionen und Abweichungen durch Näherungen

x in m	h in m	l in m	Steigung in %	Winkel in Grad	Fehler l und x in %	Hangabtrieb-skraft, Winkelformeln, normiert	Fehler Hangabtriebs-kraft in % (Näherung)
1	0,000	1,00000	0,0	0,000	0,000	0,000	0,000
1	0,010	1,00005	1,0	0,573	0,005	0,010	0,005
1	0,020	1,00020	2,0	1,146	0,020	0,020	0,020
1	0,050	1,00125	5,0	2,86	0,125	0,050	0,125
1	0,100	1,00499	10,0	5,711	0,499	0,100	0,499
1	0,200	1,01980	20,0	11,310	1,980	0,196	1,980
1	0,300	1,04403	30,0	16,699	4,403	0,287	4,403
1	0,400	1,07703	40,0	21,801	7,703	0,371	7,703
1	0,500	1,11803	50,0	26,565	11,803	0,447	11,803
1	1,000	1,41421	100,0	45,000	41,421	0,707	41,421

Für zwei Motoren mit verschiedenen Momenten und unterschiedlichen Raddurchmesser sind in der Tabelle entsprechende maximalen Steigungen angegeben, die noch mit 100% Motorunterstützung bergauf gefahren werden könnten unter Vernachlässigung von weiteren Fahrwiderständen.

Bei den Beispielen wurde sowohl der Rechenweg über die Momente, wie auch über die Kräfte in Verbindung mit den Hebelgesetzen verwendet. Bei festem Raddurchmesser wäre eine Berechnung über die Momente der schnellere Weg.

Drehmoment, Raddurchmesser und
maximale Steigung

Moment in Nm	Rad in Zoll	Radius in cm	Steigung in %
27	22	27,7	9,7
27	26	32,8	8,2
27	28	35,3	7,7
40	22	27,7	14,4
40	26	32,8	12,2
40	28	35,3	11,3
60	26	32,5	23,3

Mein einfaches Straßenmountainbike hat einen Pedalabstand von 0,17m zur Tretachse. Wenn ich mich auf die Pedale stelle, bringe ich 800N auf das Pedal. Das ergibt ungefähr 136 Nm Drehmoment auf die Pedalachse. Das Übersetzungsverhältnis beträgt 24:28 (kleinste Zähnezahl bei Pedalen gegenüber größte Zähnezahl am Hinterrad), d.h. ungefähr 0,86, und somit wären im kleinsten Gang 158,7 Nm Drehmoment auf das Hinterrad gebracht. Im größten Gang würde das

Übersetzungsverhältnis 41:14, d.h. ungefähr 2,92 betragen und somit wäre das Drehmoment 46,5 Nm.

Kraft auf Pedal:

$F = m \cdot g$ m: Masse in kg; g: Gravitationskonstante $10\left(m/s^2\right)$

Moment am Hebelarm:

$M = F \cdot R$

Moment auf das Hinterrad mit Getriebe-/Kettenübersetzung:

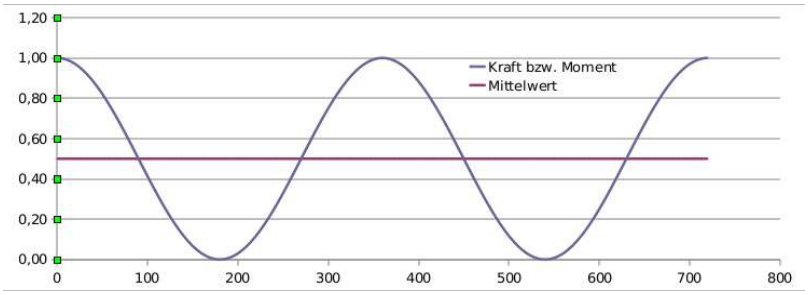
$M_{Hinterrad} = \ddot{u} \cdot M_{Pedal}$

F: Kraft in N; m: Gesamtmasse in kg; g: Ortsfaktor 10 m/s^2 (genauer 9,81); M: Moment in Nm; ü: Übersetzungsverhältnis (dimensionslos);

Der nachgemessene Raddurchmesser von 65cm (26"-Felge plus Radmantel) ergibt einen Hebelarm von 32,5 cm und somit wären theoretische rund 490N (160Nm/0,325m) als vorwärts treibende Kraft auf die Straße zu bringen möglich (Über Hebelvergleich plus Übersetzung wäre der Wert auch berechenbar (800N*0,17/0,325*28/24=488N). Das wäre ausreichend für fast 60% Steigung, d.h. fast 30° Steigungswinkel.

Das große Moment liegt nur vor wenn die Pedale eine waagrechte Position haben. Im oberen und unteren Umkehrpunkt ist das Moment praktisch Null. In einem Diagramm hätte das Moment über den Drehwinkel aufgetragen einen sinusförmigen Kurvenverlauf. Das durchschnittliche Moment wäre der Mittelwert (hier arithmetischer Mittelwert) und somit läge die durchschnittliche vorwärts treibende Kraft nur bei ca. 245N (0,5*800N*0,17/0,325*28/24=244N). Das entsprechende Drehmoment am Hinterrad betrüge 83 Nm und wäre ausreichend für rund 25% Steigung oder 14° Steigungswinkel.

Daraus lassen sich bereits einige Auslegungsparameter für den Pedelecantrieb ableiten, wenn dieses als Mountainbike verwendet werden soll. Bei einem maximalen Drehmoment von 40Nm wird dieser Extremfall noch mit einer Motorunterstützung von etwa 50% unterstützt. Für eine 90% Unterstützung wären 80Nm notwendig. Höhere Drehmomente sind eigentlich nicht mehr notwendig zu realisieren.



Angenäherter Verlauf der Pedalkräfte (normiert) abhängig vom Drehwinkel.

Bereits nach wenigen Pedalumdrehungen würde bei solch extremen Steigungen (Beispiel 25%) ein durchschnittlicher Radler in der Regel absteigen, pausieren und schieben bis es wieder flacher würde. Eine noch stärkere Untersetzung des Kettenantriebes würde hier die Situation verbessern.

In der Praxis kann das maximale Moment und damit auch das durchschnittliche Moment höher werden, durch Anziehen des Lenkrades mit den Armen um noch mehr Kraft auf die Pedale zu bringen. Ein normal gewichtiger Fahrer kann so insgesamt 25% bis 50% mehr Kraft auf die Pedale durchaus schaffen. Eine andere Möglichkeit mehr Moment zu erzeugen bieten Schuhalterungen an den Pedalen um noch die Zugkraft des jeweils gegenüber liegendenden Beines auszunutzen. Das bringt durchaus noch einmal 25-50% mehr Kraft für die Fortbewegung. Ein Nachteil ist, dass es etwas länger braucht im Notfall das Bein auf den Boden zu bringen, da der Fuß (bzw. Schuh) erst aus der Pedalhalterung ausgehängt (auch wenn es nur eine kleine Drehbewegung wäre) werden muss.

Bei 12% Steigung wäre das notwendige Drehmoment 40 Nm. Ein Motor mit 40Nm würde bei einem 26"-Rad maximal eine Unterstützung bis 12% Steigung ermöglichen bei reinem Motorbetrieb ohne zusätzliche Tretunterstützung. Für eine Unterstützung im Alltagsbetrieb sind das durchaus taugliche Werte für einen Motorantrieb, auch wenn obige Extrembeispiele etwas darüber liegen sollten.

Bei niedrigen Geschwindigkeiten ist die Luftkühlung für den Motor natürlich geringer, so dass das Moment nicht lange gehalten werden kann. Die Antriebskraft/das Antriebsmoment muss in dem Fall zum Schutz vor Überhitzung zurückgefahren werden. Bei niedrigen Geschwindigkeiten begrenzt also das maximale dauerhaft nutzbare Drehmoment die Unterstützung bei längeren Steigungsstrecken. Technische Verbesserungen bei der Motorkonstruktion und Leistungselektronik haben die Zeitdauer bis zur Einsetzung der Abregelung verlängert, aber die abrufbaren Angaben der Hersteller geben keine Auskunft, welche Zeitdauerwerte bei den Modellen erreicht werden.

Für die meisten Fahrer stellen Strecken mit Steigungen die größtem Ansprüche an die körperliche Fitness. An der flachen Küste wäre durchaus möglich, dass hier der Gegenwind an erster Stelle der Fahrwiderstände stehen könnte.

1.3.2 Leistungen und Arbeit

Nachdem bei niedrigen Geschwindigkeiten das maximale Drehmoment auf Grund der Gefahr von Überhitzung meist nur kurzzeitig ausgenutzt werden kann, erscheint grundsätzlich schnell Fahren ein Ausweg aus dem Dilemma zu bieten, wenn es nicht noch eine weitere Einschränkung durch die Leistung gäbe.

Ohne Berücksichtigung einer Leistungsgrenze, wurde bei einer Motorunterstützung zusätzlich zum Pedal, der benötigte Kraftaufwand beim Treten in die Pedale, wie eine maximal 12% geringere Steigung (Steigungsabzug) erscheinen. Bei einer 16% Steigung wäre der Kraftaufwand beim Treten in die Pedale vergleichbar einer Steigung von 4% (16-12=4). Hierbei würde 75% des Moments vom Motor zugegeben.

Eine Leistungsobergrenze von 250W des Motors beschränkt die Unterstützung bei höheren Geschwindigkeiten. Bei dem Beispiel des Straßenmontainbike wird bereits in der Nähe von 10km/h auf Grund der Leistungsobergrenze das beigesteuerte Moment zurückgefahren. Mit zunehmender Geschwindigkeit nimmt der Anteil des beigesteuerten Momentes immer mehr ab. Bei 25km/h wären bis zu 3,5% Steigung oder Steigungsabzug möglich. Der Motor liefert in dem Falle maximal so viel Antrieb, dass die Steigung eine Kraft erfordert, wie für eine 3,5% weniger steile Strecke aufgewendet werden müßte. Eine Steigung von 10% würde also mit einem Kraftaufwand, wie eine Steigung von 6,5% gefahren werden. Der Motor würde in dem Beispiel ungefähr zu 1/3 unterstützen.

Berechnung der Leistungen:

$$P = F \cdot v$$

(bzw. $P = M \cdot 2\pi \cdot n$ n: in U/s (Umdrehungen pro Sekunde, M: Drehmoment in Nm))

Leistung = Kraft * Geschwindigkeit, Umrechnung 1 J/s = 1 W

P: Leistung in J/s oder W; F: Kraft in N; v: Geschwindigkeit in m/s (*3,6 Umrechnung in km/h);

Steigungswiderstand für 100kg Gesamtgewicht

Steigung in %	Steigung in Grad	F in N	E in Wh/km	P in W bei 5 km/h	P in W bei 10 km/h	P in W bei 20 km/h	P in W bei 50 km/h
0,5	0,29	5,00	1,39	6,94	13,89	27,78	69,44
1	0,57	10,00	2,78	13,89	27,78	55,55	138,88
2	1,15	20,00	5,55	27,77	55,54	111,09	277,72
5	2,86	49,94	13,87	69,36	138,72	277,43	693,58
10	5,71	99,50	27,64	138,20	276,40	552,80	1.382,00
20	11,31	196,12	54,48	272,38	544,77	1.089,53	2.723,84
30	16,70	287,35	79,82	399,09	798,19	1.596,38	3.990,94
60	30,96	514,50	142,92	714,58	1.429,15	2.858,31	7.145,77

Als weitere Größe wurde in der Tabelle noch für verschiedene Steigungen die verrichtete Arbeit pro km angegeben.

Berechnung der verrichteten Arbeit:

$$E = F \cdot s$$

Arbeit = Weg * Strecke in Joule, Umrechnung: 3600 J = 1 Wh

$$E = P \cdot t$$

Arbeit = Leistung * Zeit in Joule oder Ws, Umrechnung: 3600 J = 1 Wh, 1 J = 1 Ws

E: Energie in J; F: Kraft in N; s: Strecke in m; t: Zeit in s;

Bei 10km/h wären gemäß Tabelle ungefähr bis zu 9% Steigung bei motorischer Vollunterstützung möglich. Der Motor liefert in dem Falle maximal so viel Antrieb, dass die Steigung eine Kraft erfordern würde, wie für eine 9% weniger steile Strecke aufgewendet werden müßte. Eine Steigung von 10% würde mit einem Kraftaufwand, wie eine Steigung von 1% gefahren werden. Der Motor würde ungefähr zu 90% unterstützen. Bei höheren Geschwindigkeiten, z.B. 20 km/h würde der Antrieb nur noch die Steigung etwa um 4,5 vermindern und somit betrüge die Motorunterstützung ungefähr noch 45%. Diese Zusammenhänge sollten Nutzer dieser Fortbewegungsmittel kennen.

Bei den genannten Beispielen wurden den Wirkungsgrad reduzierende Verluste zunächst weggelassen um die Sachverhalte zu vereinfachen.

Sonstiges:

Bei 25km/h wurde sich das 26"-Rad ungefähr mit 3,5 U/s bzw. 200-210 U/min drehen. Handelsübliche Gleichstrommotoren und Drehstrommotoren (Einpolmaschinen) liegen meist im Bereich von 3000-4000 U/min und benötigen daher ein Getriebe zur Herabsetzung der Drehzahl und Erhöhung des Drehmomentes.

Insgesamt überstreichen die 18 Gänge, bzw. Stufen, meines Straßenmountainbikes ein Verhältnis von 3,4 ((41:14)/(24:28)=3,4). Das Gesamtverhältnis ist entscheidend, ob das Fahrrad auch wirklich breitbandig eingesetzt werden kann. Es gab Bekannte, die kauften teure Räder mit 21 und mehr Gängen, die nur einen gesamten Übersetzungsbereich von 3,0 überstrichen (0,92 bis 2,7). Der

einzige Unterschied war nur eine feinere Abstufung der Gänge, der bei einem bestimmten Leistungssportprofil auch seine Berechtigung hat, bei diesen aber gar nicht zutraf. Für den normalen Nutzer (Alltagsfahrten, etwas Gelegenheitssport) ist vor allem eine möglichst große Untersetzung des kleinsten Ganges erforderlich, wenn dieser Gelände oder Straßen mit Steigungen überwinden muss.

2 Höhendifferenzen

Eine Motorunterstützung soll in der Regel das Überwinden von Höhenunterschieden erleichtern, da diese die Fahrt am häufigsten erschweren und die Fahrtzeit verlängern.

Bei hohen Geschwindigkeiten bremst vor allem der Fahrtwind. Aber bei Geschwindigkeiten bis zu einer Unterstützungsgrenze von 25 km/h fällt dieser meist nicht so stark ins Gewicht im Vergleich zu den Steigungswiderständen. Bei Gegenwind liegt die Grenze ab wann der Luftwiderstand viel Kraft kostet bei niedrigeren Geschwindigkeiten.

Wer eine Steigung hoch fährt, überwindet einen Höhenunterschied und verrichtet damit eine Hubarbeit. In der Physik gibt es den Ansatz über die Energie zur Berechnung der verrichteten mechanischen Arbeit.

Potentielle Energie:

$$E = m \cdot g \cdot h$$

E: Energie in J oder Ws, Umrechnung J in Wh: 3600 J = 1 Wh (oder das Ergebnis in Joule durch 3600 teilen); m: Gesamtmasse in kg; g: Ortsfaktor 10 m/s^2 (genauer 9,81); h: Höhendifferenz in m;

Hubarbeit für 100kg

Höhe in m	E in Wh	E in kJ	E in kKal	E in kKal bei η=22%
1	0,3	0,9	0,2	1,0
3	0,8	2,8	0,7	3,0
10	2,8	9,2	2,2	10,0
50	13,9	45,8	10,9	49,8
100	27,8	91,7	21,9	99,5
1000	277,8	916,7	218,9	995,2
2000	555,6	1833,3	437,9	1990,4

Bei einer Gesamtmasse von 100kg werden zur Überwindung von je 100m Höhendifferenz ungefähr 30Wh Akkuenergiegehalt benötigt (27,78Wh) bei voller motorischer Unterstützung. Für die Auslegung des mitgeführten Energiespeichers spielen die Höhenunterschiede eine wesentliche Rolle.

Für eine Bergfahrt mit 1000m Höhendifferenz müßte der Akku mindestens 300-400Wh speichern. Bei einem E-Bike ohne Bremsenergierückspeisung ist zu beachten dass die Summe aller Anstiegsfahrten den Wert der Höhendifferenz 1000m nicht übersteigen darf. D.h. 600 Höhenmeter bergauf, 200m bergab und dann wieder 600m bergauf wären für das E-Bike eine Akkubelastung, als wären 1200 insgesamt Höhenmeter gefahren worden. Bei einer Einstellung von 50% Unterstützung, wäre der Akku erst nach 2000m Höhendifferenz leer.

Bei idealer Nutzbremsung, d.h. der Antrieb arbeitet als Generator, könnte die gesamte Energie wieder in den Akku zurück gespeist werden. In dem Falle würde der Berg hochgefahren bis der

Akku leer wäre und anschließend zurück wieder Nutzbremsbetrieb. Am Startpunkt hätte der Akku den gleichen Ladungszustand, wie vor der Abfahrt, wenn es keine Verluste gäbe.

Da der Akku im Ladebetrieb in der Regel keine höheren Leistungsaufnahmen verträgt als bei der Leistungsabgabe, gibt es bei der Nutzbremsung auch eine Leistungsgrenze, die zu beachten ist.

Auch das Bremsmoment des Motors unterliegt physikalischen Grenzen auf Grund der Induktionsgesetze. So kann das maximale Bremsmoment im Generatorbetrieb auch nicht höher sein, als im Motorbetrieb. Bei sehr kleinen Drehzahlen des Generators wird das Bremsmoment in der Regel auch kleiner auf Grund der niedrigen Induktionsspannung, die mit der Drehzahl abnimmt. Spezielle Frequenzumrichter für Drehstrommotoren haben dieses Absinken des Momentes im Bremsbetrieb bei kleinen Drehzahlen nicht.

Zum Beispiel wären bei 10km/h bis zu 9% Steigung beim Motorbetrieb (250W) möglich. Die gleiche längere Strecke bergab gefahren würde die gesamte Energie im Nutzbremsbetrieb zurück in den Akku laden, allerdings kann die ganze Strecke mit 9% Steigung (bzw. Gefälle) bergab nicht schneller als ebenfalls 10km/h gefahren werden. Für eine nicht zu vernachlässigende Anzahl von Fahrern dürfte eine solche angepasste langsame Fahrweise bergab nicht in Frage kommen.

Bei Schussfahrten bergab werden die Geschwindigkeiten so hoch und Bremswege so lange, dass fahren mit Helm angebracht wäre. Bei niedrigen Geschwindigkeiten, d.h. Durchschnittsgeschwindigkeit 13 km/h, maximale gefahrene Geschwindigkeit 20km/h, würde eine Helmpflicht auch dem Fußgänger auferlegt werden müssen, wegen der sehr ähnlichen Risiken (Verminderung der Kopfverletzungen wenn Fußgänger stürzt oder angefahren wird).

In den Absätzen vorher beschriebene Fahrten mit maximaler Nutzbremsung auf Gefällestrecken wären auf jeden Fall weniger riskant, der Akku würde länger reichen, und auch die mechanische Bremse würde es mit weniger Abnutzung und längerer Lebensdauer der Verschleißteile danken.

Für eine Höhendifferenz von 100m werden theoretisch etwa 30 Wh (27,8 Wh, oder 0,1 MJ) benötigt. Die 0,1 MJ entsprächen ungefähr 25 Kilokalorien. Da der Mensch mit einen Wirkungsgrad von etwa 22% die Energie der Nahrung in Bewegung umsetzt, könnten hierbei rund 100 Kilokalorien abgebaut werden. Somit wäre die Energie von ¼ Liter Cola oder 4% des Tageskalorienbedarfs bei dieser Fahrt verbraucht worden.

3 Fahrtwiderstandsanteile durch Rollen und Wind

3.1 Rollwiderstand

Bei diesen Widerständen sind die Schwankungen je nach Eigenschaften des Fortbewegungsmittels, des Fahrers, des Fahrbahnbelages, des Streckenverlaufs (Anzahl und und Radien der Kurven) recht unterschiedlich. In der Literatur (leifi Physik, kreuzotter.de, usw.) werden Werte im niedrigen Bereich von 4N/kN angegeben. Diese Wiederstandswerte werden üblicherweise auf gutem Fahrtweg (ohne Schmutz und Schnee) bei Geradeausfahrt ermittelt. Für den Vergleich der Reibungsverlusten einzelnen Räder sind diese durchaus aussagekräftig.

Unter realen Bedingungen liefert ein Wert von 25N/kN (ca. 7Wh/km) Ergebnisse auf der sicheren Seite und deckt somit den additiven Mix aller Reibungsverluste gut ab (Rad/Weg und Übertragungsverluste). Ein Mountainbike mit Stollenreifen auf unsauberer Straße mit vielen Kurven kommt diesem Wert recht nahe. Ein schlammbedeckter Fahrweg, eine Schicht Sand oder Schneematsch kann höhere Werte verursachen. Ein Tourenrad oder Rennrad liegt bei den Reibungsverlusten natürlich deutlich unter diesem hohen Wert. Der Energieaufwand je Kilometer und die aufzubringende Leistung zur Überwindung der Rollwiderstände beim Fahrrad sind gemäß folgender Tabelle im Vergleich zu Steigungen und Luftwiderständen nicht hoch.

$$F_R = \mu_R \cdot F_G$$

F: Kraft in N; μ: Rollreibungswert (dimensionslos), μ=0,01 entspricht 10 N/kN (bei Berechnungen besser zu händeln als Angaben in Promille); F_G: Gewichtskraft in N;

Rollwidwerstand für 100kg (1kN) Gesamtgewicht

μ_R in N/kN	F in N	E in Wh/km	P in W bei 5 km/h	P in W bei 10 km/h	P in W bei 20 km/h	P in W bei 50 km/h
4	4	1,11	5,56	11,11	22,22	55,56
6	6	1,67	8,33	16,67	33,33	83,33
10	10	2,78	13,89	27,78	55,56	138,89
15	15	4,17	20,83	41,67	83,33	208,33
25	25	6,94	34,72	69,44	138,89	347,22

Einige Rollwiderstandswerte μ_R aus Physikformalsammlungen: Rad/Straße (Auto) 0,015...0,025, Rennrad 0,004, Rad 0,006, Schiene 0,002;

Für den Fahrwiderstand auf Straßen und guten Forstwegen eignet sich für Berechnungen ein Wert von 6N/100kg zu benutzen. Bei vielen Tabelllen in dem Dokument wurde dieser Wert gewählt.

3.2 Luftwiderstand

Der Fahrtwindeinfluß nimmt im Gegensatz zu Rollreibung stark und nicht linear mit zunehmender Geschwindigkeit zu. Der Fahrtwindwiderstand schwankt stark je nach Fortbewegungsmittel, Fahrerprofil und dessen Haltung.

Der Gegenwind auf einem Streckenstück dessen Gefälle so stark war, dass ohne Treten 30 km/h erreicht wurden, war nach dem Sturm Wiebke noch so heftig, dass ich sogar einige Meter rückwärts den Berg hochgedrückt wurde ohne in die Pedale zu treten und die Fahrt abbrach.

Luftwiderstand:

$$F_{LW} = c \cdot A \cdot \frac{\rho}{2} \cdot v^2$$

$$P_{LW} = c \cdot A \cdot \frac{\rho}{2} \cdot v^3$$

Luftdichte ρ ca. 1,1...1,3 kg/m^3 je nach Luftdruck, Temperatur und Feuchtigkeit;

A: Querschittsfläche in m$^{2;}$ c: Luftwiderstandsbeiwert (dimensionslos); v: Geschwindigkeit in m/s; F: Kraft in N; P: Leistung in J oder W;

Beim Rad setzt sich der Luftwiderstandsbeiwert zusammen aus dem Luftwiderstandsbeiwert, der den Einfluß der Querschnittsfläche beschreibt und einem Anteil der die Länge des Fahrzeuges berücksichtigt. Für ein Alltagsrad gibt es daher Lufwiderstandsbeiwerte von bis zu 1,1 (dimensionslos), statt in Formelsammlungen für Fahrzeuge befindliche Werte von 0,4…0,9. Die Querschnittsfläche hängt dabei stark vom Fahrer und dessen Haltung ab. Die Bandbreite schwankt

meistens von 0,45 bis 0,6 m^2 für die Querschnittsfläche in Fahrtrichtung.

Bei 25N/kN Reibung liegt der Energiebedarf bei etwa 7 Wh/km und bei 4N/kN hätte dieser etwa 1,1 Wh/km. Ein Vergleich der Kräften und Energieaufwände zur Überwindung der Luftwiderstände verdeutlicht, dass im Bereich von mittleren Geschwindigkeiten bereits der Luftwiderstand höher als der Rollwiderstand werden kann. Gäbe es eine ein lagenwinkelabhängige Steuerung würde sich bei Gegenwind eine Motorunterstützung nicht zuschalten, aber ein eine Messung der Kraft auf die Pedale und der Geschwindigkeit berücksichtigt starke Windeinflüsse.

Bei steilen Wegstücken wird er Gegenwind glücklicherweise meistens durch den noch zu bezwingenden Hügel stark abgeschwächt und die volle Wucht des Windes trifft den Radfahrer erst im Bereich der Kuppe. Beim bergab Rollen kann ein passend starker Gegenwind durchaus schonend für die Bremse wirken.

Luftwiderstand für Rad mit A=0,6 und c=1,1 (ρ=1,3)

$$F_{LW} = c \cdot A \cdot \frac{\rho}{2} \cdot v^2 = 0{,}429\, v^2$$

v in km/h	v in m/s	F in N	P in W	E in Wh/km
5	1,39	0,83	1,15	0,23
10	2,78	3,31	9,19	0,92
15	4,17	7,45	31,03	2,07
20	5,56	13,24	73,56	3,68
25	6,94	20,69	143,67	5,75
30	8,33	29,79	248,26	8,28
40	11,11	52,96	588,48	14,71
50	13,89	82,75	1149,37	22,99

Bei einer Fahrt im Regen, wäre zusätzlich noch die Gewichtserhöhung durch das aufgenommene Wasser und die Energie für die Beschleunigung des mitgeführten Wassers berechnet werden. Ob das die Genauigkeit der Ergebnisse merklich beeinflußt oder nur „ein paar Stellen hinter dem Komma ändert“ wäre vielleicht noch eine kleine Messreihe und Thema für eine wissenschaftliche Arbeit.

4 Bewegungsenergie oder kinetische Energie

Ein Fahrzeug in Bewegung stellt auch eine Form der gespeicherten Energie dar, die sogenannte kinetische Energie. Drehende Räder speichern auch Bewegungsenergie. Eine Anwendung findet dies bei Schwungradspeichern. Bei einem Fahrrad besitzen die Räder eine geringe Masse (Felgen, Speichen, Mantel und Schlauch) gegenüber dem gesamten System, so dass dieser Anteil hier vernachlässigt wird (d.h. Ergebnisse haben dadurch ca. 5% niedrigere Werte).

Kinetische Energie:

$$E_{kin} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$$

E: Energie in J; m: Masse in kg; v: Geschwindigkeit in m/s;

Zum Beispiel wird für eine Höhendifferenz von etwa 3 m einer Tiefgaragenausfahrt eine Energie von rund 1 Wh benötigt. Wird ein Anlauf vor der Steigung genommen bei dem 25-30 km/h erreicht wird, reicht der Schwung um diese Steigung ohne Schalten hoch zu radeln. Kurze steile Wegstücke können daher mit Anlauf leichter überwunden werden. Umgekehrt wird diese Geschwindigkeit auch beim Herunterrollen der Rampe erreicht. Diese Energie wird im Bremsvorgang vernichtet. Beim Nutzbremsen verursacht der Abbau von kinetischer Energie über kurze Zeit hohe Leistungsspitzen. Bei großen Beschleunigung wären diese Leistungsspitzen ebenfalls aufzuwenden.

Bei Unfällen korreliert die Stärke der Verletzung nicht wie meist angenommen mit der Geschwindigkeit, sondern mit der kinetischen Energie, die überproportional mit zunehmender Geschwindigkeit ansteigt. Bei hohen Geschwindigkeiten wäre außer einem Helm daher auch die feste Schutzkleidung von Motorradfahrern mit Beckengurt, verstärkten Kleidung im Bereich der Schultern und Beine durchaus angebracht.

Bei Unfällen als Fußgänger ohne Fahrzeugbeteiligung liegt interessanterweise der Energiebereich bei 0,5 bis 0,6 Wh. vergleichbar mit der kinetischen Energie bei 20 km/h. Beim Rennen liegt dieser vergleichbare Bereich bei 21 bis 36 km/h (100m in 17 oder 10 Sekunden). Mit den Armen abgefangen werden kann im Idealfall eine Energie, die einer Liegestütze entspricht, d.h. z.B. 100kg auf 80cm, also nur 0,3 Wh.

Aus dem Vergleich der kinetischen Energie kann durchaus argumentiert werden, dass eine Helmpflicht für Radler (zum Beispiel bis 25 km/h) eigentlich dann auch beim Fußgänger, Jogger, Fahrer und Insassen von Autos und Bussen eingeführt werden müßte. Zum Thema Gurtpflicht passt auch gut das Liegestützenbeispiel. Techniker, zum Beispiel Physiker und Gurtmuffel zugleich dürfte es daher eigentlich nicht mehr geben.

Kinetische Energie für Rad mit 100kg Gesamtgewicht:

v in km/h	**5**	**10**	**15**	**20**	**25**	**50**	**100**
v in m/s	1,39	2,78	4,17	5,56	6,94	13,89	27,78
E_kin in kJ	0,10	0,39	0,87	1,54	2,41	9,65	38,58
E_kin in Wh	0,03	0,11	0,24	0,43	0,67	2,68	10,72
entspricht Hub in m	0,10	0,39	0,87	1,54	2,41	9,65	38,58

Bremsen	**s für Δ5km/h**	**s für Δ5km/h**	**s für Δ5km/h**	**s für Δ5km/h**	**s für Δ5km/h**	**s für Δ25km/h**	**s für Δ50km/h**
50 W	2	6	10	14	17	145	579
100W	1	3	5	7	9	72	289
250W	0,4	1	2	3	3	29	116

Bremsen	**x für Δ5km/h**	**x für Δ5km/h**	**x für Δ5km/h**	**x für Δ5km/h**	**x für Δ5km/h**	**x für Δ25km/h**	**x für Δ50km/h**
50 W	2	10	31	62	103	1575	12024

100W	1,1	5	15	31	52	788	6012
250W	0,4	2	6	12	21	315	2405

Die kinetischen Energie bestimmt auf ebener Stecke maßgeblich den Bremsweg und die Beschleunigungszeiten. Die Berechnung unter besonderen Randbedingungen, z.B. eine Leistungsbegrenzung ist analytisch sehr aufwendig, kann aber mit Näherungsverfahren relativ einfach bestimmt werden.

Sonstiges:

Im folgenden wird der analytische Ansatz zur Bestimmung des Kurvenverlaufs der Beschleunigungsfahrt ohne verlustbehaftete Fahrwiderstände hergeleitet. Dazu wird der Zusammenhang zunächst als Integral dargestellt.

$$P = F \cdot v = F(t) \cdot \int \frac{F(t)}{m} dt = const$$

Im Prinzip wird eine Funktion gesucht. die folgende Bedingung erfüllt:

$$const = f(t) \int \frac{f(t)}{m} dt$$

Durch Ableitung kann diese in eine Differentialgleichung umgewandelt werden in der Hoffnung, dass die Lösung einfacher würde. Ein anderer Weg geht über probieren mit verschiedenen Funktionen, Polynome, Exponentialfunktionen, Trigonometrische Funktionen, Wurzelfunktionen und sonstige Funktionen. Wer viele Ableitungen bereits selbst rechnete, fällt gegebenenfalls noch eine Rechnung mit einer Wurzelfunktionen ein und erkennt, dass diese eine mögliche Lösung sein könnte.

$$\sqrt{(x)} \frac{d}{dt} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{(x)}}$$

$$const = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{(x)}} \cdot \int \left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{(x)}}\right) dx = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{(x)}} \cdot \sqrt{(x)} = -\frac{1}{2}$$

Der Ansatz zeigt, dass die grafische Lösung einen wurzelförmigen Kurvenverlauf für v(t) hätte für den Bereich mit Leistungsbegrenzung und ohne andere Fahrtwiderstände.
In der Realität sind die angegebenen Fahrwiderstände vorhanden und der theoretische Kurvenverlauf läuft exponentiell auf einen Gleichgewichtswert zu.

$$f(x) = c \cdot (1 - e^{bx})$$

Meist kann der Verlauf ausreichend genau über diese vereinfachte Formel dargestellt werden.

Die vollständige Gleichung mit zusätzlicher Berücksichtigung der kinetischen Energie aus der Rotation wäre:

$$E_{kin} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 + \frac{1}{2} \cdot J \cdot \omega^2$$

$$n = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{v}{R}$$ Drehzahl Rad pro Sekunde

$$\omega = \frac{v}{R}$$ Bogenmaß versus Geschwindigkeit

$$E_{kin} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 + \frac{1}{2} \cdot J \cdot \omega^2 \approx 1{,}05 \cdot \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$$

J: Trägheitsmoment des Drehkörpers, hier Vorder- und Hinterrad;

Beide Terme (translatorische und rotatorische Bewegungsenergie) haben einen quadratischen Kurvenverlauf abhängig von der Geschwindigkeit. Der Einfluß des zweiten Termes läge etwa bei 5% bei 100kg Gesamtgewicht, 20kg Radgewicht.

Das Trägheitsmoment des Hinterradnabenmotors ist auf Grund des kleineren Radius im Vergleich zur Felge deutlich geringer als man vermuten würde und würde die kinetische Energie höchstens um 2-3% erhöhen.

$$E_{kin} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 + \frac{1}{2} \cdot J \cdot \omega^2 \approx 1{,}07 \cdot \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$$

Somit läge für diesen Fall insgesamt der Einfluss des zweiten Terms bei höchstens 7 bis 8 %. Für die meisten Berechnungen kann dies daher vernachlässigt werden.

5 Antriebssysteme

5.1 Pedelec und E-Bike

Bei den Pedal Electric Cycle (Pedelec) sind folgende Kombinationen möglich:

1. Elektromotorischer Hauptantrieb mit der Möglichkeit des zusätzlichen Pedalantriebs
2. Pedalbetriebener Hauptantrieb mit der Möglichkeit des zusätzlichen Elektromotorantriebs
3. Wahlweise Elektromotorantrieb oder Pedalantrieb

Jedoch sind nicht alle Kombinationen am Markt verfügbar. Häufig zu finden sind folgende Verwendung der Begriffe für Pedelec und E-Bike in Deutschland.

- Pedelec als Oberbegriff für alle Mischantriebsformen Pedal und E-Motor.
- Der Elektromotor von Pedelecs gibt nur ergänzend seine Leistung ab, wenn auch in die Pedale getreten wird. Bei Pedelecs ist die Motorleistung auf 250 Watt begrenzt und endet bei 25km/h. Pedelecs werden im Sinne der StVO als Fahrräder betrachtet und bedürfen keiner Zulassung, Helm und Versicherung. (StVO rechtlich als Fahrrad eingestuft)
- Werden diese Kriterien nicht erfüllt spricht man meist von E-Bikes. Diese gibt es mit und ohne Pedalunterstützung, höhere Leistungen und Geschwindigkeiten. Allerdings sind dann Versicherung und Zulassung erforderlich. (StVO rechtlich als Kleinkraftrad eingestuft)
- S-Pedelec für Pedelec mit mehr Motorleistung als 250W oder Motorunterstützung auch über 25km/h. Versicherung, Helm und Zulassung erforderlich. (StVO rechtlich als Kleinkraftrad eingestuft)
- Sonderregelung für Antriebe bis 6km/h Anfahr-, Schiebehilfe (Nicht nur Zweiräder, keine Versicherung und Helmpflicht, z.B. für Rollstühle, E-Tretroller, Laufhilfen, Mini-Stapler, Schneefräse, Rasenmäher)

Die Normen und Gesetze der EU schreiben den Staaten keine Begriffsdefinitionen vor, aber legen für alle Staaten bindend die gleichen technischen Eigenschaften und Grenzwerte für die rechtliche Einstufung fest. Aktive E-Motorunterstützung bis 250W und 25km nur während des aktiven Pedalbetriebs wird rechtlich dem Fahrrad gleichgestellt. Somit gilt hier europaweit keine Zulassungs, Anmelde-, Versicherungs- und Helmpflicht. Alle anderen Kombinationen werden rechtlich dem Kleinkraftrad gleichgestellt. Somit gilt hier europaweit eine Anmelde-, Versicherungs- und Helmpflicht.

5.2 Antriebsarten

Den geringsten Aufwand haben natürlich Antriebssysteme, die nur Unterstützen und keine Nutzbremsung erlauben. Dazu gehören in der Regel alle Antriebe, die im Tretlagerbereich eingebaut werden. Auf Grund des Freilaufs in der Hinterradnabe können über die Kette nur Zugmomente übertragen werden. Auf der anderen Seite kann für den Antrieb die Übersetzungsänderung der Kettenschaltung am Hinterrad mit genutzt werden. Die Motoren arbeiten hier oft mit hohen Drehzahlen und großen Untersetzungen. Diese Getriebe in umgekehrter Richtung als Generator betrieben sind bei großen Untersetzungen oft sehr schwergängig und somit nicht so gut geeignet. Wenn das Hinterrad keinen Freilauf hätte würde die Kette zwangsgeführt bis zum Stillstand mitlaufen. Sollten hierbei Kleidungsteile (z.B. Hosenbein) zwischen Kette und Zahnrad geraten, würde dies eine große Verletzungsgefahr bedeuten. In dem Falle wäre der ganze Bereich mit vollschützenden Abdeckungen zu versehen.

Nutzbremsung haben einige Modelle mit Motoren in den Radnaben. Es gibt diese oft als einen relativ schnell drehenden Motor mit hohen Momenten und ein Planetengetriebe zur Untersetzung. Getriebelose und kommutatorfreie Radnabenmotoren haben keine Verschleißteile und sind somit besonders langlebige Antriebe. Die Fähigkeit der Nutzbremsung/Rekuperation/Stromrückspeisung des Antriebs hängt von der verwendeten Steuerung und Leistungselektronik ab. Wenn die Batterie noch vollgeladen ist, gibt es keine Rückspeisung, bzw. die Rückspeisung wird abgeschaltet wenn die Batterie wieder voll ist. Wenn die Batterie leer wäre kann mittels Rückspeisung diese auch wieder aufgeladen werden. Das ist auch praktisch wenn man sich ohne lange Strecke und hoher Geschwindigkeit etwas „auspowern“ möchte. Es schont die mechanische Bremse. Auf Strecken mit abwechselnd vielen Steigungen und Gefällen (im Nutzbremsbetrieb gefahren) verlängert sich die Reichweite merklich.

Als Akku wird heute bei den E-Bikes meistens Lithiumzellen verwendet. Auf der einen Seite haben diese Zellen weniger Gewicht, kosten aber mehr als NiMh-Zellen. Auf Grund der notwendigen Schutzschaltungen bei Lithiumakkus sind im Akkupack fest verbaut und montiert am Fahrrad.

Die neueren Lithium-Metall-Akkuzellen sind aktuell die robustesten Lithium-Akkus. Durch Selektion um eine geringere Streuung der Kapazität der einzelnen Zellen zu erreichen, kann bei einigen Anwendungen auf die aufwendigen Schutzschaltungen weitestgehend verzichtet werden. Dabei wird in der Regel eine niedrigere Ladeschlussspannung verwendet, das heißt 3,6 Volt statt 4,2 Volt für eine Zelle. Diese Zellen sind auch Schnellladefähig bis 4C (bis zum Vierfachen der Nennkapazit als Ladestrom). Bei kleinen Akkupacks im Modellbau wird die Nutzung der Schnellladung und Weglassen der Schutzschaltungen praktiziert.

Bei größeren Akkupacks und großen Umwelttemperaturbereichen (auch im Hinblick auf die Produkthaftung) werden Abstriche in der Form notwendig, so dass bei minimal einfach gehaltene Schutzschaltungen, die Schnellladungsfähigkeiten nicht entsprechend ausgenutzt werden kann. Die kleine und leichte Bauweise erlaubt auch keine ausreichende Abfuhr der Wärme, die bei der Schnellladung entstehen würde. Das begrenzt leider auch die Leistung bei der Rekuperation.

Bei NiMh-Zellen (ready to use Zellen, d.h. nach 12 Monaten noch 80% der Ladung verfügbar) sind keine aufwendigen Schutzschaltungen notwendig, da diese weniger kritisch sind. Die NiMh-Zellen sind auch unkritischer beim Schnellladen (4C). Gegenüber Li-Akkus ist die Spannungskennlinie flach, so dass der Rückschluss auf den Ladezustand durch Messung der Zellenspannung sehr ungenau ist. Für viele Hersteller ist das eigentlich der Hauptgrund, warum kaum noch andere Akkus als Li-Akkus verwendet werden. Nebenbei liefert der Li-Akku natürlich auch Argumente für eine Herstellerbindung betreffend Nachkauf von Akkupacks, wenn die Lebensdauer auf Grund der erreichten maximalen Zyklenzahl erreicht wurde.

Das Gewicht wäre bei NiMh-Akkus etwa 0,3 kg für 30Wh und 3kg für 300Wh. Vielleicht findet sich noch ein Hersteller, der nur einen kleinen Li-Akku einbaut, mit der Option als Ergänzungspack einen NiMh-Block anzuschließen für mehr Gesamtenergie beim Fahren oder auch nur zum Laden

des kleinen eingebauten Li-Akkus.

Selbst besitze ich noch kein E-Bike/Pedelec und bevorzuge es noch komplett selbst in die Pedale zu treten. Wenn ich mir ein E-Bike/Pedelec kaufen sollte, dann käme für mich nur ein Modell mit Nutzbremse (Rekuperation) in Frage. Tendieren würde ich dabei eher zum Pedelec, wegen der größeren Flexibilität (kein Helm, z.B. wohin mit dem Helm am Bahnhof).

Es gibt im Internet genügend Seiten mit Vergleichen der Vor- und Nachteile von verschiedenen Modellen, die über Suchmaschinen leicht zu finden sind. Einige mir dort nicht vorhandene oder nur selten aufgeführte Aspekte habe ich hier gesammelt. Es gibt auch Sonderbauformen, die die aufgeführten Vor- oder Nachteile in stärkerer oder schwächer Form enthalten.

Vergleich der Antriebsarten			
Eigenschaften	**Mittenmotor**	**Vorderradmotor**	**Hinterradmotor**
Rahmen:	Benötigt eigens konstruierten Rahmen im Bereich der Tretlager.	Keine Änderung und kann in die meisten Rahmen eingebaut werden.	Keine Änderung und kann in die meisten Rahmen eingebaut werden.
Bausätze:	Es gibt Bausätze, bei denen muß der Rahmen bearbeitet werden.	Ja, gbt es.	Ja, gibt es.
Motorgewicht:	3-4 kg	3kg (Getriebemotor) 3,5-5kg (Getriebeloser Motor)	3kg (Getriebemotor) 3,5-5kg (Getriebeloser Motor)
max. Drehmomente:	27-60 Nm	27-60 Nm	27-60 Nm
Schwerpunktlage:	Liegt tiefer als bei Radnabenmotoren	Liegt höher als bei Mittenmotoren.	Liegt höher als bei Mittenmotoren.
Ruperation / Nutzbremsbetrieb	Nicht möglich, wegen Freilauf. (Freilauf der Kettenschaltung)	Nicht möglich bei Motoren mit Freilauf. Ja, ist möglich, aber auf dem Markt kaum erhältlich.	Nicht möglich bei Motoren mit Freilauf. Ja, gibt es auf dem Markt. (meist auf max. 100W begrenzt)
Verschleiß Kette	Erhöht den Verschleiß der Kette, da der Antrieb auf die Kette wirkt.	Kein Mehrverschleiß der Kette.	Kein Mehrverschleiß der Kette.
Verschleiß Zahnkränze	Erhöht den Verschleiß der Zahnkränze, da der Antrieb auf die Kette wirkt.	Kein Mehrverschleiß der Zahnkränze.	Kein Mehrverschleiß der Zahnkränze.
Mitnutzung von Übersetzungen	Ja, da der Antrieb auf die Kette wirkt bzw. auf die Tretachse.	Nein, da der Antrieb direkt auf das Rad wirkt.	In der Regel Nein, da der Antrieb direkt auf das Rad wirkt. Es gibt aber Varianten mit integrierten Nabengetriebe, die die Übersetzung mit nutzen.
Fail safe Optionen in Verbindung mit Verschleiß	Kette, Zahnkränze, bei Ausfall, nur noch Schieben möglich.	Anfahrhilfe bis 6km sofern vorhanden kann noch verwendet werden.	Anfahrhilfe bis 6km sofern vorhanden kann noch verwendet werden. Wenn Übersetzungen mit genutzt werden, nur Schieben möglich.
Fail safe Optionen in Verbindung mit Motorausfall oder Steuerungsausfall.	Bei einigen Modellen kann auch der Tretantrieb nicht mehr nutzbar sein.	Fortsetzung der Fahrt mit Tretantrieb ohne Motorunterstützung.	Fortsetzung der Fahrt mit Tretantrieb ohne Motorunterstützung. Wenn Übersetzungen mit genutzt werden, nur Schieben möglich.

Mitnahme Antriebskomponenten in ein anderes Rad.	In der Regel nicht möglich.	Meistens möglich Komponenten in ein anderes normales Rad einzubauen für versierte Bastler.	Meistens möglich Komponenten in ein anderes normales Rad einzubauen für versierte Bastler.
Weiternutzung als nur normales Rad ohne Antrieb.	Bedingt möglich.	Normale Hinterradfelge ohne Motor einbauen und E-Teile abmontieren.	Normale Hinterradfelge ohne Motor einbauen und E-Teile abmontieren.
Umbau auf anderes Produkt anderer Hersteller.	Rahmen in der Regel so spezifisch, dass nur Produkte des Herstellers verwendet werden können, solange diese noch erhältlich sind.	In der Regel Produkte anderer Hersteller einbaubar.	In der Regel Produkte anderer Hersteller einbaubar.
Ggf. eingebaute Sensoren:	Temperatursensor, Hallsensor	Temperatursensor, Hallsensor	Temperatursensor, Hallsensor
Spannungsbereiche:	erhältlich für 24-48V	erhältlich für 24-48V	erhältlich für 24-48V
Verschiebung Optimumspunkt:	Verschiebung, da Übersetzungen mit genutzt werden.	Nicht verschiebbar.	a) Nicht verschiebbar. b) Verschiebbar bei Motoren mit speziellen Zusatzwicklungen oder Steuerung der Polpaarzahl. c)Verschiebung, wenn Übersetzungen (z.B. spez. integr. Nabenschaltung) mit genutzt werden.

Von Standpunkt eines Pedelec-Hersteller könnte durchaus der Radnabenantrieb marketingstrategisch verglichen mit Druckern einen Drucker mit Patronen ohne Chip darstellen und der Mittenantrieb ein Drucker mit Chip darstellen. Für viele Leser dürfte der Vergleich schwere Kost darstellen und oft nicht so ganz nachvollzogen werden. Allerdings bieten die kleinen Bedieneinheiten mit ihren kleinen Displays eine ganze Menge an Funktionen und Spielereien.

Für die Ansteuerung von bürstenlosen Gleichstrommotoren (BLDC) wurden in den letzten Jahren stetig integrierte Schaltkreise und auch die Halbleiter für die Leistungsendstufen weiterentwickelt. Dadurch erzeugen diese Komponenten weniger Abwärme und die niedrigdrehenden Nabenmotoren reduzieren nur noch selten die Unterstützung auf Grund des Erreichens der maximalen Betriebs-temperatur.

Allerdings passiert es immer wieder, dass bei einer Bergfahrtspause das Hinterrad gerade so steht, dass der Nabenbereich der vollen Sonneneinstrahlung ausgesetzt ist. Der meistens in einem schwarzen Gehäuse eingebaute Motor ist dann natürlich richtig schön warm geworden und die Motorunterstützung ist zu Beginn der Weiterfahrt erst einmal reduziert. Auf die Designfarbe schwarz des Nabenmotors sollten daher die Hersteller unbedingt verzichten und lieber hellsiber oder andere helle reflektierende Farben verwenden. Bei geschickter Ausführung könnte im Straßenverkehr dann auch auf die Seitenreflektoren in den Speichen verzichtet werden.

5.3 Kennlinien von Antrieben und Dimensionierungseinflüsse

Die Verläufe von Wirkungsgradkennlinien sind abhängig von der Drehzahl und vom abgegebenen Drehmoment. Diese haben im Arbeitsbereich ein Maximum und fallen auf beiden Seiten einen abfallenden Kurvenverlauf.

Die Diagramme werden entweder bei bestimmten Nenngrößen ermittelt oder es werden jeweils die optimalen Punkte ähnlich einer Wurzelortskurve aufgetragen. Ausführlicher und aussagekräftiger

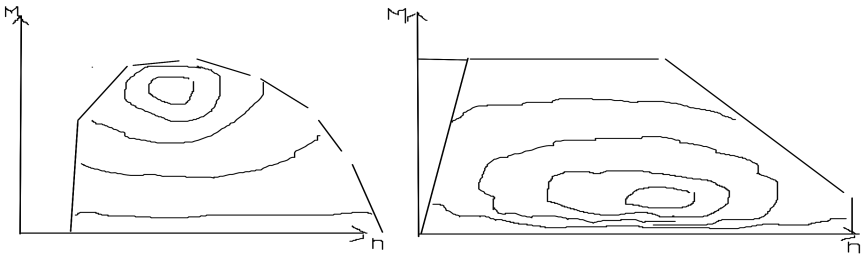
wäre ein zweidimensionales Kennlinienfeld mit Höhenliniendarstellung für den Wirkungsgrad (Muscheldiagramm, Verbrauchskennlinienfeld).

Wenn ein solches Diagramm eines konventionellen Verbrennungsmotors mit dem eines Elektromotorantriebes verglichen werden würde, fiele auf daß der Kurvenverlauf des E-Antriebs fiel flacher verläuft. Dieser Vorteil wird beim Hybridantrieb ausgenutzt für bessere Wirkungsgrade bei einem üblichen Fahrbelastungsmix.

- Einflußgrößen auf den Wirkungsgrad haben in der Regel folgende Effekte ohne Anspruch auf Vollständigkeit:
    - Große Momente benötigen einen großen Strom durch die Wicklungen. Die ohmschen Verluste in den Wicklungen steigen quadratisch mit dem Strom an. Die maximale Permeabilität der Materialien setzt auch Grenzen für erreichbaren Drehmomente eines Motors.
    - Hohe Drehzahlen benötigt hohe Frequenzen bei der Ansteuerung der einzelnen Wicklungen. Es nehmen hier die Verluste zu durch Magnetisierung, Wirbelströme, Skineffekt und Induktivitäten (Blindleistung, Blindwiderstände) zu. Luftwiderstände im Motor nehme auch überproportional zu.
    - Bei kleinen Drehzahlen und Momenten wird das Verhältnis von abgegebener Nutzleistung zu den Mindestverlusten ungünstiger. Hierzu zählen z.B. Hystereseverluste (auch Restmagnetismus) und Reibungsverluste.

Das zweidimensionale Kennlinienfeld des Rennrad-, City- oder Mountain-Radlers würde unterschiedlich aussehen. Die Kennlinienfelder der Antriebe auf dem Markt, die viel über die Dimensionierung des Herstellers erzählen würden, sind leider nicht verfügbar. Somit muss sich der Kunde auf seinen subjektiven Eindruck bei seinen Testfahrten verlassen. Ein erfahrener Händler wird in der Regel bei der Auswahl unterstützen, so dass sich die Zahl der Testfahrten in Grenzen halten wird.

Die folgende Skizze zeigt grob den prinzipiellen Unterschied des Verbrauchskennfeld, auch Muscheldiagramm oder Wirkungsgradkennfeld eines Verbrennungsmotors (linke Skizze) zu einem Elektromotor (rechte Skizze):



Gute Simulationen haben solche Wirkungsgradkennfelder des Gesamtsystems hinterlegt. Mittels dieser Kenntnisse kann umgekehrt natürlich auch vor einem praktischen Test eine Strecke (auch sehr lange Strecken wie auch Rundstrecken) bzw. ein Streckenmix zusammengestellt werden um ein bestimmtes System besser als ein anderes System abschneiden zu lassen. Auch Normen und Fachzeitschriften sind vor solchen Einflüssen nicht gefeit.

Der Pedelec-Fahrer sollte sich bewußt sein, dass viel fahren im ungünstigen Wirkungsgradbereich schneller die Batterie leert. Bei vielen Antrieben der beginnt der wirkungsgradoptimale Bereich in der Nähe von 13 km/h (oder beginnt ab der Geschwindigkeit und verläuft relativ flach bis ca. 20 km/h für Pedelecs bis 25 km/h Unterstützungsgeschwindigkeit), wenn Momente des Antriebs abgefordert werden. Würde der Motor zusätzlich noch im Bereich von 1/7...1/4 des maximalen Nennmomentes betrieben, wäre der Wirkungsgrad noch besser (weil noch näher am Optimum). Ein Hilfsantrieb, der die Übersetzung einer Gangschaltung teilweise mit nutzen kann, hat hier einen kleinen Vorteil, da sich der optimale Punkt bzw. Bereich entsprechend des geänderten Über-

setzungsverhältnisses verschiebt. Allerdings sind hier die Übersetzungskomponenten einem höheren Verschleiß ausgesetzt.

6 Simulationsansätze

6.1 Beschleunigung ohne Fahrwiderstände (Verluste)

Mit einer Tabellekalkulationsanwendung (OpenOffice Calc, MS EXCEL, Gnumeric, LibreOffice) r lassen sich die Beschleunigungsfahrten relativ einfach berechnen. Bei Verwendung einer Tabellenkalkulationsanwendung steigen die Fehler bei zu großen Schritten auf der anderen Seite bei zu kleinen Schritten wird die Tabelle sehr groß und ist kaum noch zu händeln. Hier bewährt hat sich für die meisten Berechnungen eine Tabelle mit einer Schrittweite von 0,1 Sekunden. Bei der Leistung P gibt es dabei einen kleinen Überschwinger, der das Gesamtergebnis im Wesentlichen nicht beeinflußt.

Bei Umsetzung der Bewegungsgleichungen in ein numerisches Verfahren müssen Zirkelschlüsse vermieden werden. Somit werden nach Möglichkeit die die Ergebnisse jeweils aus Werten der vorherigen Zeile berechnet.

Bewegungsgleichungen für F(t): Konstanter Wert; a: Beschleunigung in m/s^2:

$$a=\frac{F}{m}$$

$$v(t)=a\cdot t+v_0$$

$$x(t)=\frac{1}{2}\cdot a\cdot t^2+v_0\cdot t+x_0$$

Die Formeln können auch über die Integration hergeleitet werden.

$$v(t)=\int a\,dt=a\cdot t+C=a\cdot t+v_0$$

$$x(t)=\int (a\cdot t+v_0)dt=\frac{1}{2}\cdot a\cdot t^2+v_0\cdot t+C=\frac{1}{2}\cdot a\cdot t^2+v_0\cdot t+x_0$$

Für zeitlich nicht konstante Beschleunigung werden die Integrale oft sehr schwierig analytisch zu lösen. Umgehen läßt sich die Hürde mit numerischen Verfahren, die im folgenden angewendet werden.

$$a(t)=\frac{F(t)}{m}=\frac{1}{m}\cdot F(v(t),x(t))=\frac{1}{m}\cdot(F_{Mot}(t)-F_R(t)-F_{Steig}(t,x)-F_{Wind}(t,v))$$

Obiges wäre eine mögliche Formel für die meisten Abhängigkeiten.

Zur Integration wird hier die Rechteckregel zum Teil vermischt mit der Trapezregel verwendet.

Numerischer Aufbau:

Step 1a:

Bedingung $P_{Mot}(v_n)\leq P_{Mot,max}$

$$F_{Mot} = F_{Mot,max}$$

$$F_{Wid} = F_{Roll}$$

$$F_{B,n+1} = F_{Mot} - F_{Wid}$$

Bedingung, wenn beim nächsten Schritt $P_{Mot} > P_{Mot,max}$

Mit $P = F \cdot v$ bzw: $F_{Mot} = \frac{P_{max}}{v_n}$

Die Differenz der Kräfte des Antriebes abzüglich der Widerstände bleibt für die Beschleunigung übrig.

$$F_{Wid} = F_{Roll}$$

Step 1b:

$$F_{B,n+1} = F_{Mot,n} - F_{Wid,n}$$

$$a_{n+1} = \frac{1}{m} \cdot F_{B,n+1}$$

Step 2:

$$v_{n+1} = a_{n+1} \cdot (t_{n+1} - t_n) + v_n$$

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot a_{n+1} \cdot (t_{n+1} - t_n)^2 + v_n \cdot (t_{n+1} - t_n) + x_n$$

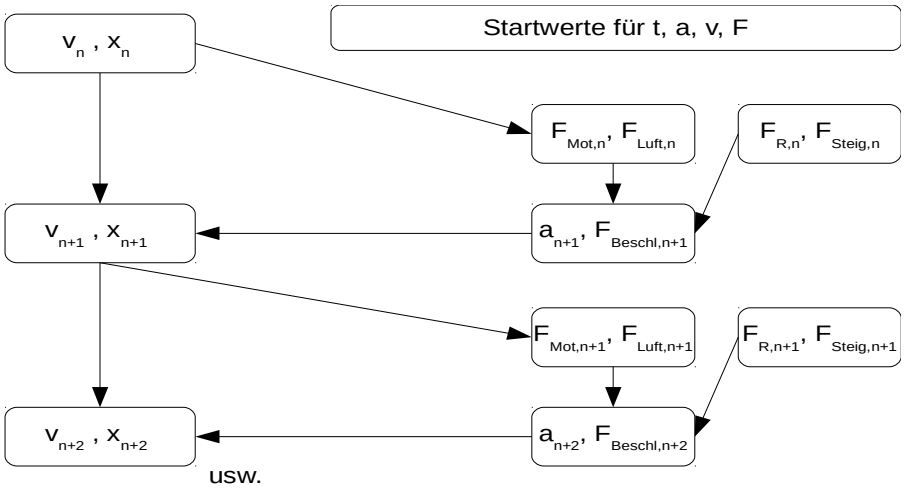
Step 1a: Kräfte berechnen mit Fallunterscheidung

Step 1b: Beschleunigung berechnen

Step 2: Geschwindigkeit und zurückgelegte Strecke berechen.

usw.

Das folgende Schaubild zeigt einen schleifenfreien Aufbau des Algorithmus von Zeitschritt „n“ zum nächsten Zeitschritt „n+1“. Es empfiehlt sich ein solches Schaubild zu entwerfen, um Indizierungsfehler zu vermeiden.



Dies wird Schritt für Schritt für jede Zeile ausgeführt. Hier beim numerischen Verfahren bestehen der verlustbehaftete Fahrwiderstand nur aus der die Rollreibung. In der folgenden Tabelle wurde die Beschleunigung ohne Fahrwiderstandsverluste ausgeführt.

$$F_{Wid} = 0$$

t	X	v	v km/h	a	F_Mot	P_Mot	Pmax	Fmax	Gas
-0,1	0,00	0,00	0,00	0,00	0,0	0,0	250	100	0
0,0	0,00	0,00	0,00	1,00	100,0	0,0	250	100	1
0,1	0,01	0,10	0,36	1,00	100,0	10,0	250	100	1
0,2	0,02	0,20	0,72	1,00	100,0	20,0	250	100	1
0,3	0,05	0,30	1,08	1,00	100,0	30,0	250	100	1
0,4	0,08	0,40	1,44	1,00	100,0	40,0	250	100	1
0,5	0,13	0,50	1,80	1,00	100,0	50,0	250	100	1
1,0	0,50	1,00	3,60	1,00	100,0	100,0	250	100	1
2,0	2,00	2,00	7,20	1,00	100,0	200,0	250	100	1
3,0	4,50	2,98	10,72	0,87	86,5	257,7	250	100	1
4,0	7,88	3,75	13,49	0,68	67,9	254,7	250	100	1
5,0	11,95	4,38	15,76	0,58	57,9	253,4	250	100	1
10,0	39,98	6,67	24,01	0,38	37,7	251,4	250	100	1
15,0	77,68	8,35	30,05	0,30	30,1	250,9	250	100	1
20,0	122,97	9,74	35,05	0,26	25,7	250,7	250	100	1
25,0	174,74	10,95	39,41	0,23	22,9	250,5	250	100	1
30,0	231,05	12,02	43,27	0,21	20,8	250,4	250	100	1
35,0	293,68	13,02	46,87	0,19	19,2	250,4	250	100	1
40,0	361,12	13,95	50,21	0,18	17,9	250,3	250	100	1
45,0	433,06	14,82	53,35	0,17	16,9	250,3	250	100	1
50,0	509,23	15,64	56,31	0,16	16,0	250,3	250	100	1
55,0	589,40	16,42	59,12	0,15	15,2	250,2	250	100	1
60,0	673,39	17,17	61,80	0,15	14,6	250,2	250	100	1

Hinterlegt in den Zellen sind folgende Formeln:

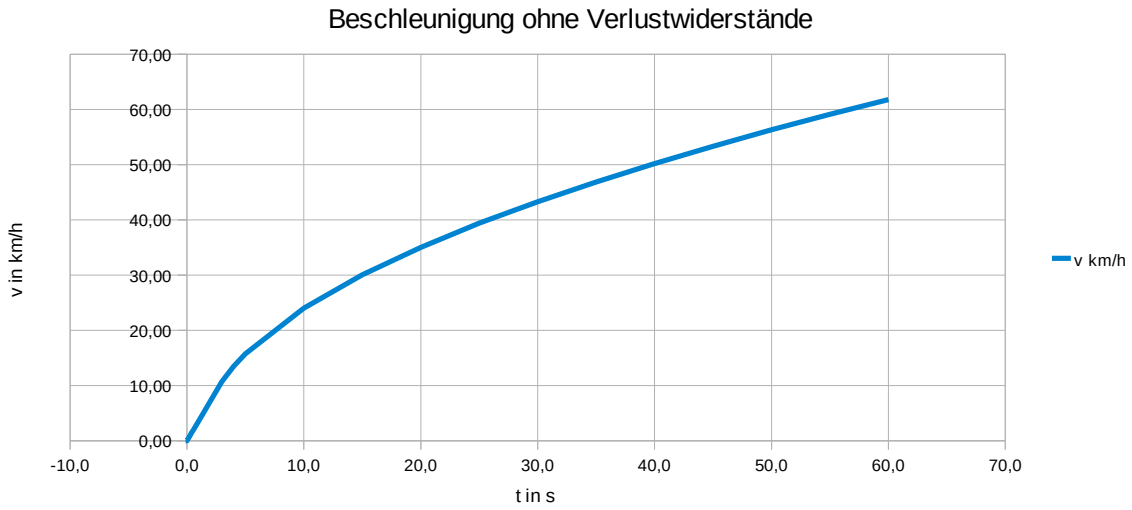
t	X	v	v km/h	a	F	P	Pmax	Fmax	Gas
-0,1	0,00	0,00	=C4*3,6	=F4/100	0,0	=F4*C4	250	100	0
=A4+0,1	=0,5*E4*(A5-A4)^2+C4*(A5-A4)+B4	=E4*(A5-A4)+C4	=C5*3,6	=F5/100	=IF(C4<N4/O4;P5*O5;N4/C4*P5)	=F5*C5	=H4	=I4	1
=A5+0,1	=0,5*E5*(A6-A5)^2+C5*(A6-A5)+B5	=E5*(A6-A5)+C5	=C6*3,6	=F6/100	=IF(C5<N5/O5;P6*O6;N5/C5*P6)	=F6*C6	=H5	=I5	1

Anbei noch eine Methode um nur die Zeilen jeder vollen Sekunde aus der langen Tabelle zu selektieren (Funktionen: engl: vlookup, deutsch: sverweis):

t	v m/s	v km/h
0	=VLOOKUP(L4;A$4:D$300;3;1)	=VLOOKUP(L4;A$4:D$300;4;1)

=L4+1	=VLOOKUP(L5;A$4:D$300;3;1)	=VLOOKUP(L5;A$4:D$300;4;1)
=L5+1	=VLOOKUP(L6;A$4:D$300;3;1)	=VLOOKUP(L6;A$4:D$300;4;1)
=L6+1	=VLOOKUP(L7;A$4:D$300;3;1)	=VLOOKUP(L7;A$4:D$300;4;1)

Das ganze ergibt folgende Wertetabelle und Graphen:



x-Achse: Zeit in s; y-Achse: Geschwindigkeit in km/h

Beim Kurvenverlauf ist der leichte Knick zu erkennen, ab dem der lineare Verlauf in den wurzelförmigen Verlauf im Diagramm übergeht.

Die weiteren Fahrwiderstände lassen sich für eine erweiterte Simulation einfach ergänzen, in dem diese in einer weiteren Spalte berechnet werden und der Wert in der Spalte „F“ abgezogen werden.

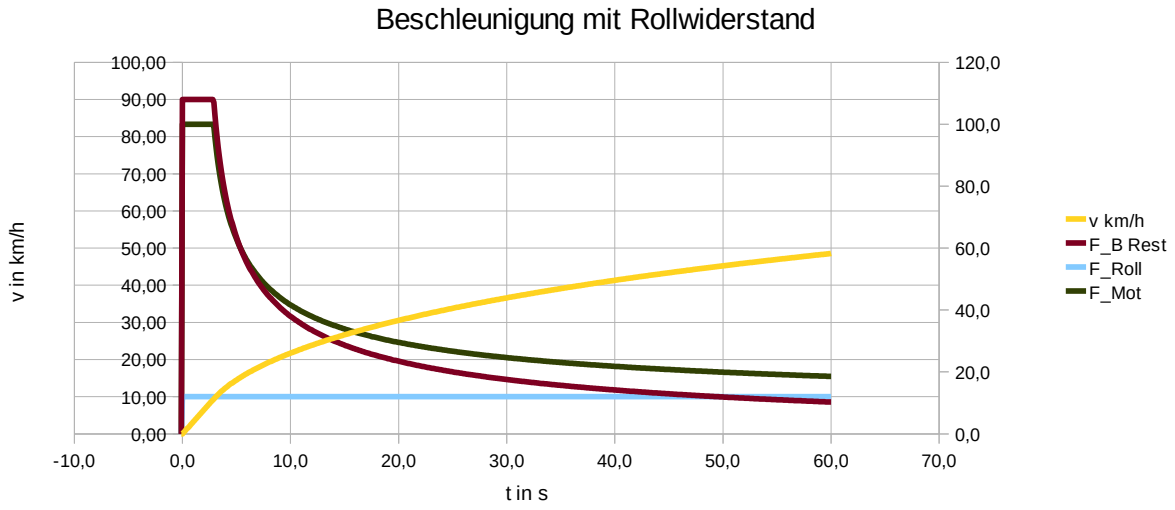
6.2 Beschleunigung mit Rollwiderstand

Bei der numerischen Berechnung wurde nur das vorhanden sein eines Rollwiderstandes angenommen.

$$F_{Wid} = F_{Roll}$$

t	X	v	v km/h	a	F_B Rest	F_Roll	F_Mot	P	Pmax	Fmax	Gas
-0,1	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,0	0,0	0,0	250	100	0
0,0	0,00	0,00	0,00	0,90	90,00	10,0	100,0	0,0	250	100	1
0,1	0,00	0,09	0,32	0,90	90,00	10,0	100,0	9,0	250	100	1
0,2	0,02	0,18	0,65	0,90	90,00	10,0	100,0	18,0	250	100	1
0,3	0,04	0,27	0,97	0,90	90,00	10,0	100,0	27,0	250	100	1
0,4	0,07	0,36	1,30	0,90	90,00	10,0	100,0	36,0	250	100	1

0,5	0,11	0,45	1,62	0,90	90,00	10,0	100,0	45,0	250	100	1
1,0	0,45	0,90	3,24	0,90	90,00	10,0	100,0	90,0	250	100	1
2,0	1,80	1,80	6,48	0,90	90,00	10,0	100,0	180,0	250	100	1
3,0	4,05	2,70	9,72	0,86	85,79	10,0	95,8	258,5	250	100	1
4,0	7,14	3,44	12,40	0,64	63,99	10,0	74,0	254,8	250	100	1
5,0	10,89	4,03	14,51	0,53	52,89	10,0	62,9	253,4	250	100	1
10,0	36,47	6,04	21,73	0,32	31,64	10,0	41,6	251,3	250	100	1
15,0	70,24	7,40	26,66	0,24	23,87	10,0	33,9	250,8	250	100	1
20,0	110,05	8,48	30,54	0,20	19,54	10,0	29,5	250,6	250	100	1
25,0	154,78	9,39	33,79	0,17	16,68	10,0	26,7	250,4	250	100	1
30,0	202,69	10,15	36,55	0,15	14,66	10,0	24,7	250,4	250	100	1
35,0	255,22	10,85	39,04	0,13	13,08	10,0	23,1	250,3	250	100	1
40,0	311,03	11,47	41,28	0,12	11,82	10,0	21,8	250,3	250	100	1
45,0	369,80	12,03	43,32	0,11	10,80	10,0	20,8	250,2	250	100	1
50,0	431,27	12,55	45,18	0,10	9,94	10,0	19,9	250,2	250	100	1
55,0	495,24	13,03	46,90	0,09	9,20	10,0	19,2	250,2	250	100	1
60,0	561,51	13,47	48,50	0,09	8,57	10,0	18,6	250,2	250	100	1



In dem Diagramm ist die Stagnation auf einen Grenzwert noch nicht zu erkennen. Bei einer Rollreibung von 10 N läge dieser bei 90 km/h und bei einer Rollreibung von 25 N läge dieser bei 36 km/h. Beim Kurvenverlauf ist der leichte Knick zu erkennen, ab dem der lineare Verlauf in eine nichtlinearen Kurvenverlauf übergeht.

6.3 Beschleunigung mit Steigungswiderstand

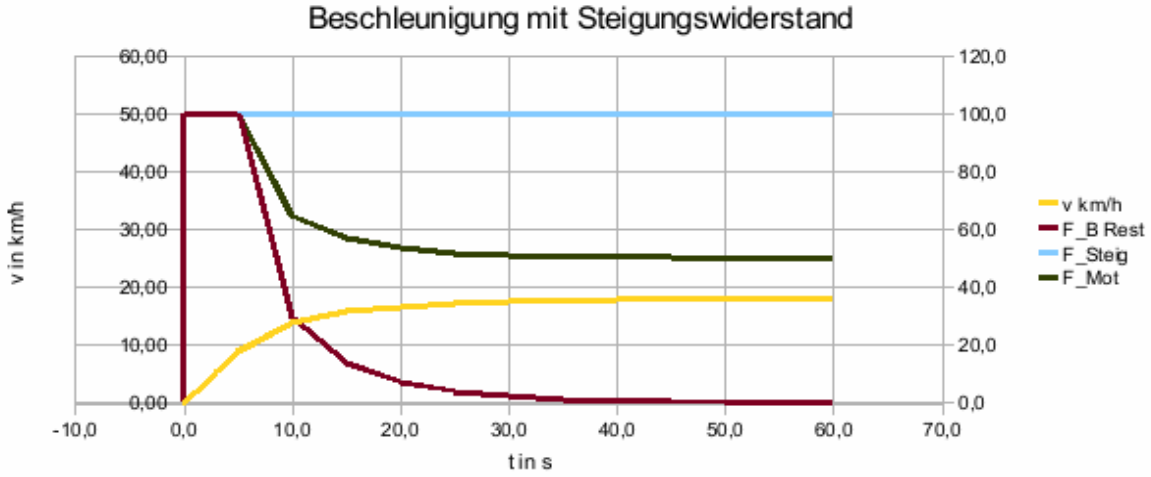
Bei der numerischen Berechnung wurde nur das vorhanden sein eines Steigungswiderstandes angenommen.

$$F_{Wid} = F_{Steig}$$

t	X	v	v km/h	a	F_B Rest	F_Steig	F_Mot	P	Pmax	Fmax	Gas
-0,1	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,0	0,0	0,0	250	100	0
0,0	0,00	0,00	0,00	0,50	50,00	50,0	100,0	0,0	250	100	1
0,1	0,00	0,05	0,18	0,50	50,00	50,0	100,0	5,0	250	100	1

0,2	0,01	0,10	0,36	0,50	50,00	50,0	100,0	10,0	250	100	1
0,3	0,02	0,15	0,54	0,50	50,00	50,0	100,0	15,0	250	100	1
0,4	0,04	0,20	0,72	0,50	50,00	50,0	100,0	20,0	250	100	1
0,5	0,06	0,25	0,90	0,50	50,00	50,0	100,0	25,0	250	100	1
1,0	0,25	0,50	1,80	0,50	50,00	50,0	100,0	50,0	250	100	1
2,0	1,00	1,00	3,60	0,50	50,00	50,0	100,0	100,0	250	100	1
3,0	2,25	1,50	5,40	0,50	50,00	50,0	100,0	150,0	250	100	1
4,0	4,00	2,00	7,20	0,50	50,00	50,0	100,0	200,0	250	100	1
5,0	6,25	2,50	9,00	0,50	50,00	50,0	100,0	250,0	250	100	1
10,0	22,87	3,87	13,92	0,15	14,89	50,0	64,9	251,0	250	100	1
15,0	43,67	4,39	15,80	0,07	7,06	50,0	57,1	250,4	250	100	1
20,0	66,33	4,65	16,74	0,04	3,79	50,0	53,8	250,2	250	100	1
25,0	89,99	4,80	17,27	0,02	2,15	50,0	52,1	250,1	250	100	1
30,0	113,71	4,88	17,56	0,01	1,26	50,0	51,3	250,1	250	100	1
35,0	138,23	4,93	17,74	0,01	0,74	50,0	50,7	250,0	250	100	1
40,0	162,95	4,96	17,84	0,00	0,44	50,0	50,4	250,0	250	100	1
45,0	187,78	4,97	17,91	0,00	0,26	50,0	50,3	250,0	250	100	1
50,0	212,68	4,98	17,94	0,00	0,16	50,0	50,2	250,0	250	100	1
55,0	237,62	4,99	17,97	0,00	0,10	50,0	50,1	250,0	250	100	1
60,0	262,58	4,99	17,98	0,00	0,06	50,0	50,1	250,0	250	100	1

In der Tabelle oder dem Diagramm ist die Stagnation auf einen Grenzwert von 18 km/h gut zu erkennen. Hier wurde vereinfacht vorherige Tabellenmethode zur Berechnung übernommen, indem 5% Steigung einer Gegenkraft von 50 N entspricht. Anzumerken sei, dass der gleiche Verlauf sich ergäbe bei einer Rollreibung von 50 N.



6.4 Beschleunigung mit Luftwiderstand

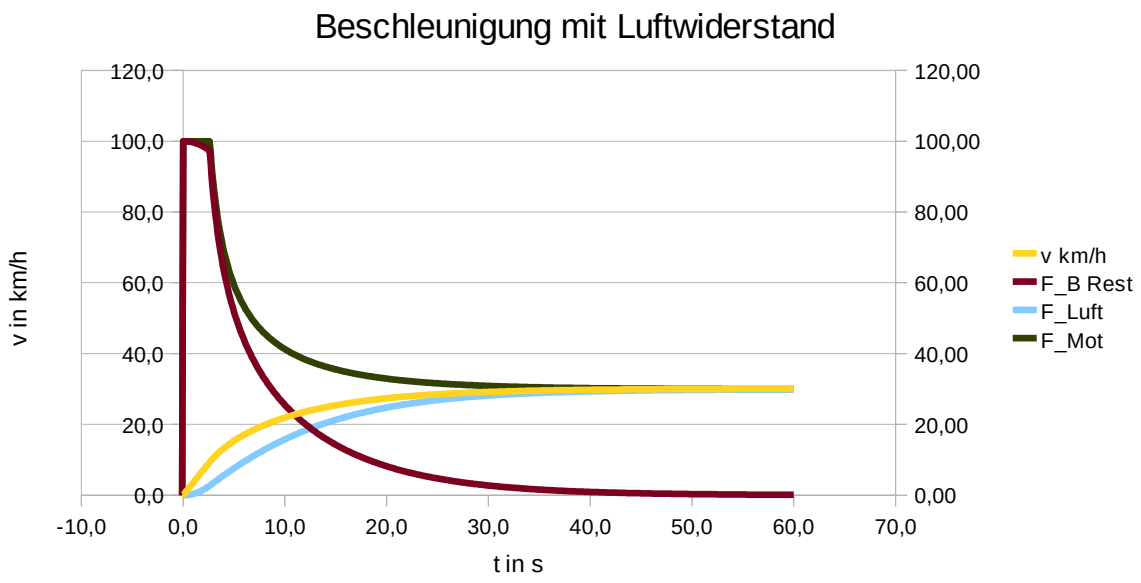
Bei der numerischen Berechnung wurde nur das vorhanden sein eines Steigungswiderstandes angenommen.

$$F_{Wid} = F_{Luft}(v_n)$$

t	X	v	v km/h	a	F_B Rest	F_Luft	F_Mot	P	Pmax	Fmax	Gas
-0,1	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,0	0,0	0,0	250	100	0
0,0	0,00	0,00	0,00	1,00	100,00	0,0	100,0	0,0	250	100	1

0,1	0,01	0,10	0,36	1,00	100,00	0,0	100,0	10,0	250	100	1
0,2	0,02	0,20	0,72	1,00	100,00	0,0	100,0	20,0	250	100	1
0,3	0,04	0,30	1,08	1,00	99,98	0,0	100,0	30,0	250	100	1
0,4	0,08	0,40	1,44	1,00	99,96	0,0	100,0	40,0	250	100	1
0,5	0,12	0,50	1,80	1,00	99,93	0,1	100,0	50,0	250	100	1
1,0	0,50	1,00	3,60	1,00	99,65	0,3	100,0	99,9	250	100	1
2,0	2,00	1,99	7,17	0,98	98,46	1,5	100,0	199,1	250	100	1
3,0	4,47	2,95	10,61	0,84	83,87	3,5	87,4	257,6	250	100	1
4,0	7,81	3,68	13,26	0,63	63,48	5,6	69,1	254,5	250	100	1
5,0	11,79	4,26	15,34	0,52	51,81	7,6	59,4	253,1	250	100	1
10,0	38,20	6,09	21,91	0,25	25,48	15,8	41,2	251,1	250	100	1
15,0	71,29	7,06	25,40	0,14	14,24	21,3	35,5	250,5	250	100	1
20,0	108,06	7,60	27,37	0,08	8,16	24,8	32,9	250,3	250	100	1
25,0	146,94	7,92	28,51	0,05	4,71	26,9	31,6	250,2	250	100	1
30,0	186,22	8,10	29,16	0,03	2,76	28,1	30,9	250,1	250	100	1
35,0	227,01	8,21	29,54	0,02	1,60	28,9	30,5	250,0	250	100	1
40,0	268,21	8,27	29,76	0,01	0,92	29,3	30,2	250,0	250	100	1
45,0	309,65	8,30	29,89	0,01	0,53	29,6	30,1	250,0	250	100	1
50,0	351,22	8,32	29,97	0,00	0,31	29,7	30,0	250,0	250	100	1
55,0	392,87	8,34	30,01	0,00	0,18	29,8	30,0	250,0	250	100	1
60,0	434,57	8,34	30,04	0,00	0,10	29,9	30,0	250,0	250	100	1

Für den Luftwiderstand wurde z.B. in Zelle C5 F_Luft folgende Formel und Werte verwendet:
=0,5*1,3*0,6*1,1*C4^2



In der Tabelle oder dem Diagramm ist die Stagnation auf einen Grenzwert von ca. 30 km/h gut zu erkennen. Hier wurde vereinfacht vorherige Tabellenmethode zur Berechnung übernommen, indem der Windwiderstand anstelle anderer Widerstandswerte jeweils über den Geschwindigkeitswert des vorherigen Zeitschrittes berechnet wird. Für einfache Simulationen mit keinem Anspruch an hohe Genauigkeiten ist eine solche Vorgehensweise durchaus möglich.

Bei der Berechnung weitere Widerstände wären folgende Erweiterungen möglich:

$$F_{Wid} = F_R + F_{Steig} + F_{Wind}(v_n)$$

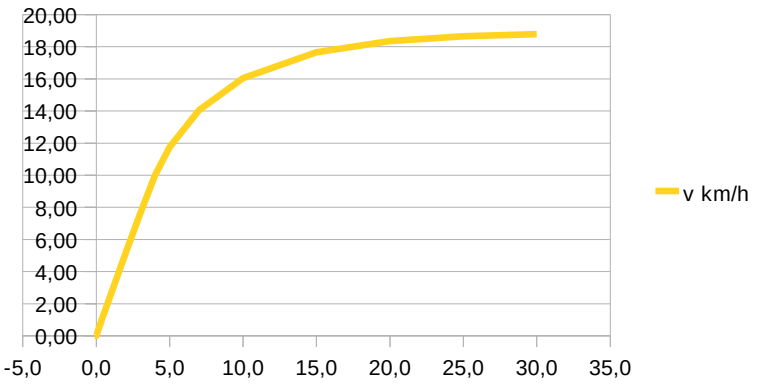
$$F_B(v_n, x_n) = F_{Mot}(v_n) - F_R - F_{Steig}(x_n) - F_{Wind}(v_n + v_g)$$

v_g: Gegenwind

6.5 Kombination aller Fahrwiderstände

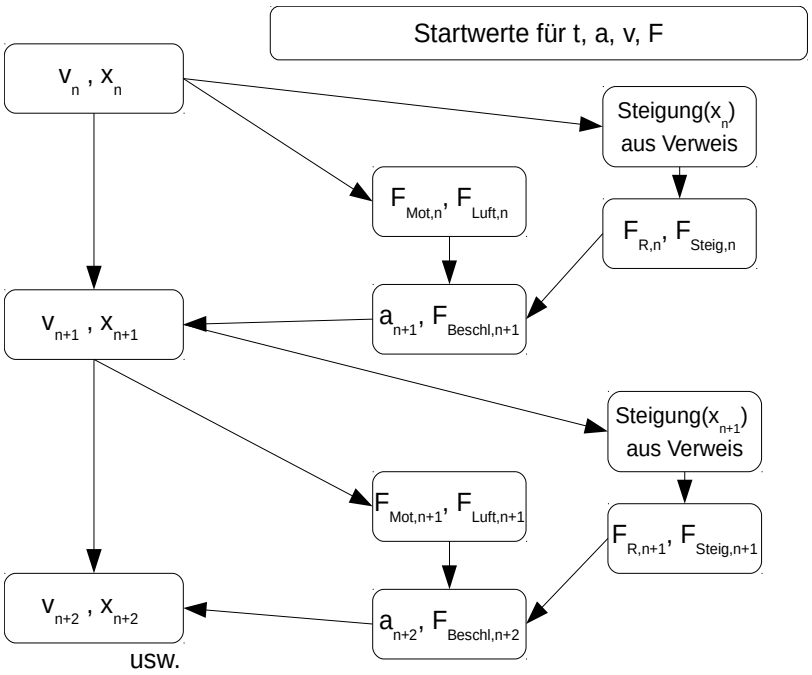
Tabelle für die Beschleunigungsfahrt mit allen Fahrwiderständen:

t	X	v	v km/h	a	F_Ges	F_Wind	Wind m/s	F_Steig	Steigung in %	F_Roll	F_Mot	P in W	Pmax	Fmax	Gas
-0,1	0,00	0,00	0,00	0,0	0,0	1,7	2,0	15,0	1,5	10,0	0,0	0,0	250	100	0
0,0	0,00	0,00	0,00	0,7	70,0	1,7	2,0	15,0	1,5	10,0	100,0	0,0	250	100	1
0,1	0,00	0,07	0,25	0,7	73,2	1,8	2,0	15,0	1,5	10,0	100,0	7,0	250	100	1
0,2	0,01	0,14	0,52	0,7	73,0	2,0	2,0	15,0	1,5	10,0	100,0	14,3	250	100	1
0,3	0,03	0,22	0,78	0,7	72,9	2,1	2,0	15,0	1,5	10,0	100,0	21,6	250	100	1
0,4	0,06	0,29	1,04	0,7	72,8	2,2	2,0	15,0	1,5	10,0	100,0	28,9	250	100	1
0,5	0,09	0,36	1,30	0,7	72,6	2,4	2,0	15,0	1,5	10,0	100,0	36,2	250	100	1
1,0	0,36	0,72	2,60	0,7	71,8	3,2	2,0	15,0	1,5	10,0	100,0	72,3	250	100	1
2,0	1,44	1,43	5,16	0,7	69,9	5,1	2,0	15,0	1,5	10,0	100,0	143,3	250	100	1
3,0	3,22	2,12	7,64	0,7	67,7	7,3	2,0	15,0	1,5	10,0	100,0	212,3	250	100	1
4,0	5,68	2,78	10,00	0,6	57,2	9,8	2,0	15,0	1,5	10,0	91,9	255,5	250	100	1
5,0	8,72	3,27	11,76	0,4	40,6	11,9	2,0	15,0	1,5	10,0	77,5	253,2	250	100	1
7,0	15,94	3,90	14,06	0,2	24,5	15,0	2,0	15,0	1,5	10,0	64,4	251,6	250	100	1
10,0	28,57	4,46	16,04	0,1	13,4	17,9	2,0	15,0	1,5	10,0	56,3	250,8	250	100	1
15,0	52,13	4,90	17,65	0,1	5,6	20,4	2,0	15,0	1,5	10,0	51,0	250,3	250	100	1
20,0	77,19	5,10	18,35	0,0	2,5	21,6	2,0	15,0	1,5	10,0	49,1	250,1	250	100	1
25,0	102,92	5,18	18,66	0,0	1,1	22,1	2,0	15,0	1,5	10,0	48,3	250,1	250	100	1
30,0	128,42	5,22	18,80	0,0	0,5	22,4	2,0	15,0	1,5	10,0	47,9	250,0	250	100	1



Verglichen mit anderen Diagramm ist hier gut zu sehen, dass die Endgeschwindigkeit wiederum auf einen Grenzwert zustrebt.

Das folgende Schaubild zeigt das Ablaufschema für eine erweiterte Simulation bei der auch ein Fahrweg mit unterschiedlichen Steigungen simuliert werden kann. Die Steigungen je Streckenstück werden über eine Verweisfunktion aus einer anderen Tabelle jeweils entnommen.



7 Messung der eigenen Leistung und der Fahrwiderstände

7.1 Ermittlung der eigenen Pedalleistung

Eine einfache Methode stellt eine Höhenfahrt dar um die eigene Antriebsleistung zu ermitteln. Bei Windstille wird eine längere Steigung von mindestens 150m hoch gefahren und die Zeit gemessen, wie auch die Streckenlänge. Die Einschätzung, wie stark die eigene Anstrengung empfunden wurde, muss Jeder ehrlich selbst treffen.

Eine Höhenfahrt von 150m in 30 min und dabei ca. 3,7..3,9 km Strecke gefahren ergäbe folgende Werte:

28Wh/100m*150m=42Wh Hubarbeit
28Wh/100m*150m/0,5h=84W Hubleistung,
6N*3,9km/h /0,5h=13W Fahrwiderstand;
Insgesamt: 97W und durchschnittlich 3,85% Steigung

Wegen der Windstille und der geringen Fahrtgeschwindigkeit konnte der Luftwiderstand vernachlässigt werden. Wer in der Stadt und auf dem flachen Land wohnt, hat vermutlich keine entsprechenden erreichbaren Steigungen in unmittelbarer Nähe.

Wird bei einem Grundumsatz mit leichter Tätigkeit von einem Kalorienbedarf von 2000-2500 kKal (8300-10400 KJ) ausgegangen, so entspricht das ungefähr 100 kKal (420 kJ) pro Stunde, am Tag etwas mehr und bei Nachtruhe etwas weniger. Bei einem Wirkungsgrad des Menschen von ca. 22% müßte dieser für 100W (Tretleistung eine Stunde lang) bzw. 100Wh mechanische Pedaltretleistung ungefähr 350 bis 400 kKal (1400-1660 kJ) verbrauchen. Das wäre ungefähr das dreifache des

stündlichen Tagesumsatzes an Kalorien (oder Joule).

Für Energie ist die SI-Einheit J (Joule) und als weitere Einheit können durchaus Ws oder Wh verwendet werden. Da jedoch der Wirkungsgrad des Menschen bei der Umsetzung von der Energie in der Nahrung in mechanischer Arbeitsverrichtung eine ungenaue Größe darstellt, wird um beide Seiten besser auseinander halten zu können, hier gerne weiterhin als Angabe kKal verwendet und die Werte kJ in Klammern ergänzt.

Ein weiterer Grund für die Verwendung von kKal statt der SI-Einheiten stellt die einfache Schätzungsumrechnung per Kopfrechnen von kKal in Wh dar, wie folgendes kleines Beispiel zeigt:

1 kKal = 4,19 kJ = 1,16 Wh

7.2 Ermittlung der Fahrwiderstände eines Rades

Am einfachsten funktioniert eine solche Messung mit Hilfe einer Anwendung auf einem Smartphone, die Sattelitennavigationsdaten mit kleinen Schrittweiten (GPS-Logging, Einstellungsschritte z.B. 1s oder 10m je Speicherwert) aufzeichnet. Bei Windstille wird mit dem Rad auf einer ebenen Strecke mit hoher Geschwindigkeit gefahren und ab einer bestimmten Stelle ausgerollt. Gleiches sollte in der Gegenrichtung auf der Strecke ebenfalls durchgeführt werden Die Messungen sollten ein paar mal wiederholt werden.

Eine mehrfache Durchführung der Messung erlaubt es die Werte zur Erlangung einer besseren Genauigkeit zu mitteln. Ein Teil der Schwankungen der GPS-Werte kann hierdurch ausgeglichen werden. Die Rollversuche in der Gegenrichtung dienen dazu die Einflüsse von kleinen Gefällen und Gegenwinden zu korrigieren, da eine ideale ebene Strecke mit absolute Windstille nicht leicht zu finden ist.

Die Meßwerte können in gängigen Tabellenbearbeitungsprogrammen (EXCEL, OpenOffice Calc, LibreOffice, Gnumeric) ausgewertet werden. Die Programme bieten eine Funktion um durch die Punkte Ausgleichspolynome (englisch: Trend Lines) der zweiten Ordnung zu legen. Aus den ermittelten Koeffizienten können die Widerstandswerte abgeleitet werden.

Ein möglicher Weg wäre, dass man jeweils aus den Messwerten v(t) über folgende Gleichung a(t) berechnet:

$$v(t)=a(t)\cdot t+v_0$$

Im nächsten Schritt werden a(t) jeweils die zugehörigen Geschwindigkeiten zugeordnet, so dass man viele Wertepaare für a(v) erhält.

$$a(v_k)\cdot m=c_{Luft}\cdot v_k^2+c_{sonst}\cdot v_k+c_{F_{Roll}+F_{Steigung}}$$

Über die Ausgleichsgerade werden die Koeffizienten bestimmt, aus denen die einzelnen Fahrwiderstände berechnet werden. Der Koeffizient des lineare Anteils c_{sonst} sollte bei der Berechnung kleiner als die Ergebnisse für die anderen Koeffzienten sein, so dass der relative Fehler durch weglassen dieses Anteils das Gesamtergebnis über den gemessenen Geschwindigkeitsbereich gering ausfällt. Fällt dieser Wert nicht entsprechend gering aus, so ist das ein Indiz dafür, dass die Qualität der Messung nicht ausreichend war. Ursachen hierfür sind oft wechselnde Windverhältnisse, dass die gemessene Strecke nicht eben genug war, noch zu kurvig war oder die Sitzposition gewechselt wurde.

8 Streckenmessung für eine Simulationsverwendung

8.1 Verwendung selbstaufgezeichneter Streckendaten

Selbst aufgezeichnete Streckendaten (GPS) unterliegen natürlich den Meßungenauigkeiten des Systems. Diese können bei den Simulationsberechnungen nicht vernachlässigt werden. Im Wesentlichen unterliegen die Daten,

- starken Schwankungen bei den Höhenangaben und,
- zusätzlichen Schwankungen bei den Koordinaten.

Mit einfachen Rechenformeln können diese Fehler nicht ausgeglichen werden. Es ist nicht möglich ohne weiteres Wissen die Ergebnisse zu verbessern. Besonders störend sind die Schwankungen der Höhe bei,

- einer kurzen Strecke, im ungünstigsten Fall Null Meter,
- größere Schwankungen zu Beginn der Aufzeichnung ,
- größere Schwankungen bei Absinken der Genauigkeit,
- wenn während der Messung neue Korrekturwerte aus der GPS-Datenübertragung verwendet werden.

Eine Abmilderung der durch die Ungenauigkeiten verursachen Auswirkungen kann über folgende Lösungsansätze erreicht werden:

- Bei Streckenbeginn werden die Höhenwerte mit einer unterschiedlichen Bewertung in eine Glättungsberechnung einbezogen.
- Die theoretisch gefahrenen Höhenwerte werden mitberechnet und aus dem Vergleich mit den Meßdaten wird ein sanfterer Verlauf erzielt.
- Die Höhenwerte werden mittels Splines geglättet. Dabei müssen geeignete Abschnitte gewählt werden.
- Die Weglänge geht bei einer Glättung in die Berechnung als Gewichtung mit ein. Unplausible Höhenunterschiede (Höhenschwankung 5m, 3m gefahren) werden dabei begrenzt.

Somit sollten die größten Ausreißer nicht mehr ein zu großes Problem darstellen. Eine Möglichkeit zur Verbesserung wäre eine Mittelung der Werte aus mehrfachen Meßfahrten der identischen Strecke. Eigene Messversuche ergaben bei zwei Fahrten der gleichen Strecke einen Höhenoffsetfehler von 15m bis 20m auf einer Strecke mit 40m Höhendifferenz. Für genauere Werte müßte die Strecke also mindestens drei bis vier mal gefahren werden. Der Algorithmus zur Glättung ist etwas aufwendig, da hier naheliegender Punkte geeignet zusammengefaßt werden müssen. Eine solche Funktion erfodert ein Programm in VBA und kann nicht mehr so ohne weiteres über Tabellenfunktionen realisiert werden.

Aus den Lat/Lon-Werten wäre es möglich die gefahrene Streckenlänge zur Sortierung der Punkte zu verwenden. Für kurze Streckenabschnitte ist dies durchaus möglich. Bei längeren Strecken ergibt sich bereits eine Abweichung, so dass die Reihenfolge der Punkte nicht mehr passt. Eine manuellen Nachbearbeitung der Daten anhand mehrere Spalten berechneter Abstandswerte zur Sortierung wäre zwar möglich, aber wäre ein zu hoher Zeitaufwand.

Ein einfacher Ansatz für die Gewichtung von mehreren Meßwerten:

$$h=\frac{a_1 h_1+a_2 h_2+a_3 h_3+...}{a_1+a_2+a_3+...}$$

Wenn der erste Höhenwert mit einem niedrigen Gewicht in das Ergebnis eingehen soll:

$$h=\frac{0{,}1\,h_1+0{,}2\,h_2+0{,}3\,h_3}{0{,}1+0{,}2+0{,}3}$$

Wenn der Abstand des Streckenstückes gewichtet werden soll:

$$h=\frac{\Delta x_1 \cdot h_1+\Delta x_2 \cdot h_2+\Delta x_3 \cdot h_3}{\Delta x_1+\Delta x_2+\Delta x_3}$$

Wenn die Gewichtung der Streckenlänge und der Punkt am Streckenbeginn niedrig gewichtet wird:

$$h=\frac{0{,}1 \cdot \Delta x_1 \cdot h_1+0{,}2 \cdot \Delta x_2 \cdot h_2+0{,}3 \cdot \Delta x_3 \cdot h_3}{0{,}1 \cdot \Delta x_1+0{,}2 \cdot \Delta x_2+0{,}3 \cdot \Delta x_3}$$

Die Höhe eines Punktes auf der Strecke könnte mit einer Gewichtung in Abhängigkeit von den Nachbarpunkten folgendermaßen geglättet werden:

$$h_n=\frac{0{,}1 \cdot \Delta x_{n-2} \cdot h_{n-2}+0{,}2 \cdot \Delta x_{n-1} \cdot h_{n-1}+0{,}4 \cdot \Delta x_n \cdot h_n+0{,}2 \cdot \Delta x_{n+1} \cdot h_{n+1}+0{,}1 \cdot \Delta x_{n+2} \cdot h_{n+2}}{0{,}1 \cdot \Delta x_{n-2}+0{,}2 \cdot \Delta x_{n-1}+0{,}4 \cdot \Delta x_n+0{,}2 \cdot \Delta x_{n+1}+0{,}1 \cdot \Delta x_{n+2}}$$

Bei der Berechnung der Höhen und auch der Steigung muss über eine Fallunterscheidung eine Division durch Null abgefangen werden. Zu hohe Steigungen auf Grund der Kenntnis der maximalen Steigung des Weges müssen begrenzt werden durch eine weitere Fallunterscheidung. Die Abweichungen bei den Höhen wird bei den Simulationsschritten notwendigerweise mitberechnet und sollte gedämpft bei den Steigungen einfließen. Zum Beispiel, dass eine Abweichung von 10m in eine zusätzliche Erhöhung der Steigung von 1% mündet.

Die Streckenabschnitte anhand der Werte für Latitude/Breitengrad und Longitude/Längengrad berechnen sich mittels Formeln für die Kugeloberflächen:

$$\Delta x=6378{,}388 * \arccos\left(\sin\left(B_n\right) \cdot \sin\left(B_{n+1}\right)+\cos\left(B_n\right) \cdot \cos\left(B_{n+1}\right) \cdot \cos\left(L_{n+1}-L_n\right)\right)$$

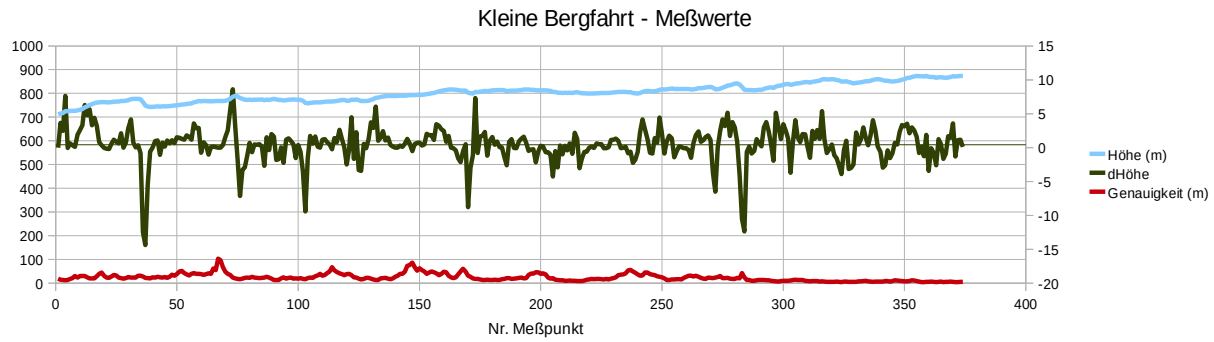
L: Längengrad; B: Breitengrad

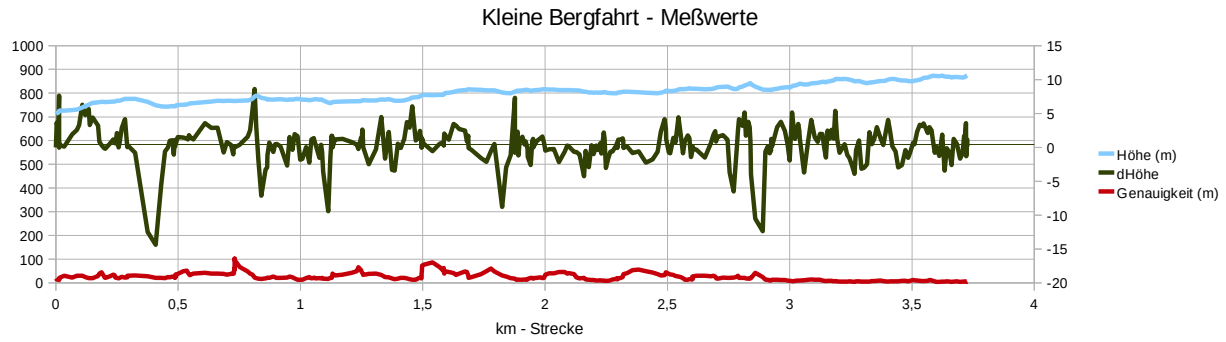
Umrechnung von Grad in das Bogenmaß:

$$\varphi_{Rad}=\varphi_{Grad} \cdot \frac{\pi}{180}$$

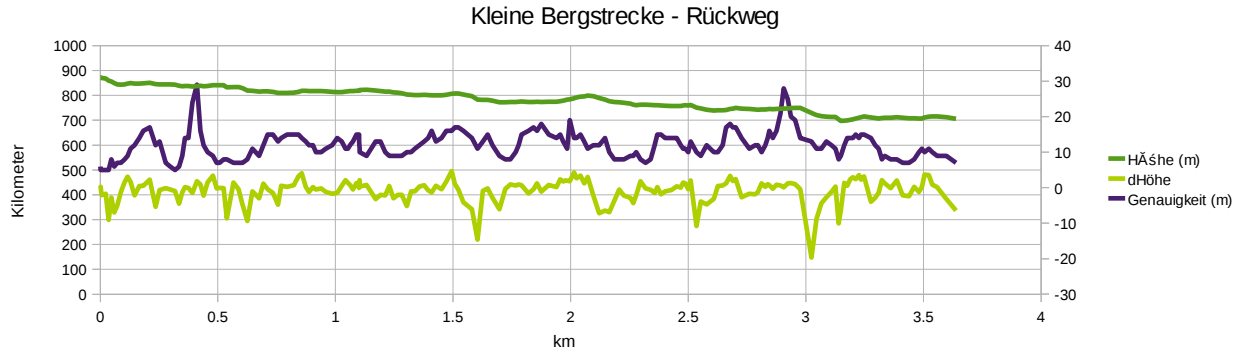
Für eine kleine Testfahrt sind hier die Punkte einmal nach der Reihenfolge und einmal nach der gefahrenen Strecke aufgetragen. Die schwankenden Höhenwerte sind gut zu erkennen. Die Genauigkeit zeigt, dass die Abweichungen der Höhenwerte nicht immer mit der Meßfehlerangabe korreliert.

Die gefahrene Strecke verläuft permanent einen Bach entlang bergauf. Vereinzelt gibt es fast flache Stellen und bei zwei kurzen Stücken gibt es ein Gefälle von ungefähr maximal 2 Meter. Für eine Simulation wären die Höhenwerte noch zu ungenau.

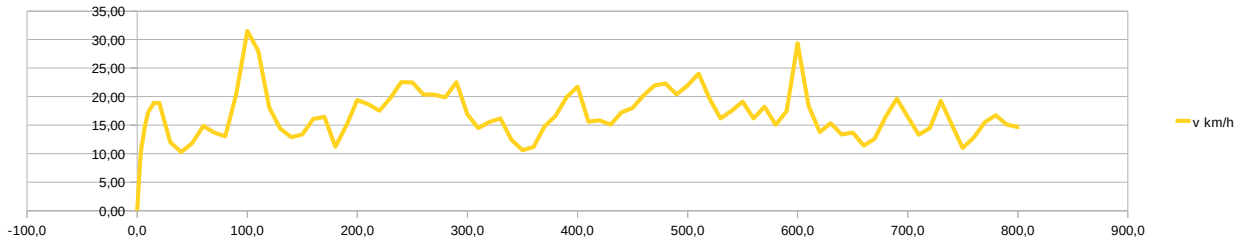


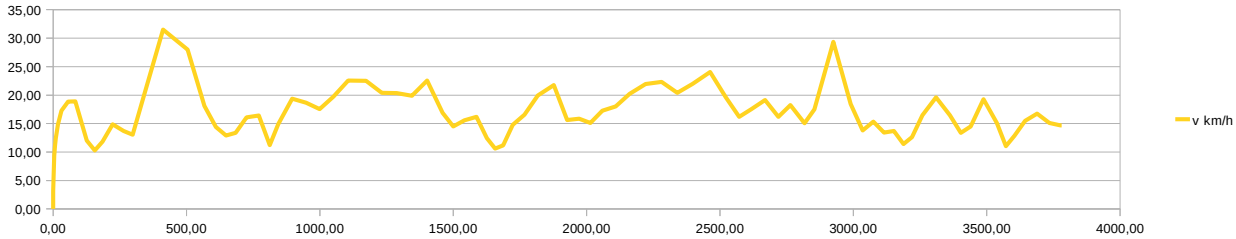


Anbei zum Vergleich die gleiche Strecke auf dem Rückweg gemessen:

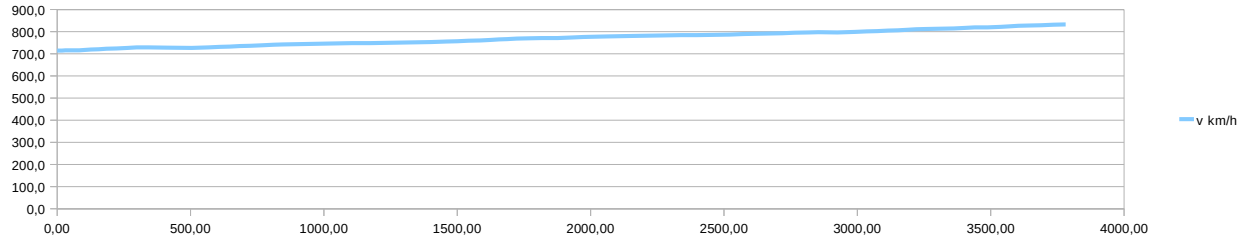


Anbei zu den ungenauen Meßwerten die Simulationsversuche mit einem Antrieb Fmax 100N und Pmax 250W:





Die Trägheit des Systems verursacht noch eine zusätzliche Glättung und somit wird der Verlauf in der Simulation viel runder bei den rückgerechneten Höhen.



Eine Simulation mit einer Tretleistung von P_{max} 100W ergab fast auf die Minute genau die aufgewendete Fahrzeit bei der Messung der Strecke mit dem Fahrrad.

8.2 Kombination mehrerer Streckenmessungen

Da vor allem die Höhenwerte stark schwanken wäre es sinnvoll die Strecke mehrfach zu fahren und die Messwerte zu mitteln und von Ausreißern zu befreien. Bei längeren Strecken addieren sich aber die Meßfehler, so dass sich die Zahlen nicht mehr in Abhängigkeit von der gefahrenen Strecke einfach sortieren lassen. Bei einfachen und serpentinenfreien Strecken kann diese einfach über den Abstand der Punkte zu den Nachbarn realisiert werden. Der Zickzackverlauf der Kurve kann mit Hilfe von Mittelwertbildungen geglättet werden, falls in Gegenrichtung auf der anderen Straßenseite gefahren wurde. Die gemessene Strecke von 3,7 km auf einer Forststraße entlang eines kleinen Voralpenflusses ließ bereits eine solche einfache Zusammenführung nicht zu.

8.3 Berücksichtigung der Antriebssystemeigenschaften

Eine gute Simulation des Gesamtsystems würde ein hinterlegtes Wirkungsgradkennlinienfeld berücksichtigen. In einer Tabellenkalkulationsanwendung wäre das eine sehr aufwendige Anwendung vieler Verweisfunktionen (Spalten und Zeilen gleichzeitig) erfordern. Die Nachbildung des Reglers könnte mit gleicher Methode realisiert werden. Ein anderer Weg für die Simulation wäre das Kennlinienfeld über eine Polynomfunktion anzunähern und diese Formel zu verwenden. Solche aufwendigen Simulationen sollten besser mit entsprechenden Simulationsanwendungen durchgeführt werden. Einzelne Parameter lassen sich in Simulationsanwendungen viel einfacher variieren und die Ergebnisse grafisch darstellen.

9 Der Nutzbremsbetrieb bzw. Rekuperation

9.1 Nutzbremsfahrt bei einer Bergfahrt mit Wirkungsgradbetrachtung

In vielen Artikeln wurde der Effekt der Nutzbremsfahrten als gering eingestuft. Bei vielen Strecken in Deutschland, vor allem im Städten, wo die meisten Einwohner leben, dürften diese Werte zutreffen. Bei den Schätzungen wurden in der Regel auch die geringe Bremsleistungen von bis zu 100W des Systems berücksichtigt.

Pedelec-Fahrt mit Nutzbremse

Eingebrachte Energie:

100Wh Radfahrer

100Wh	Antrieb

200Wh	Gesamtenergie

Aufteilung der Energie bergaufwärts:

15%	Rollwiderstand
10%	Luftwiderstand
75%	Hubarbeit

ergibt:

30Wh	Rollwiderstand
20Wh	Luftwiderstand
150Wh	Hubarbeit
150Wh	Hubenergie für Nutzbremse
0Wh	Radfahrer (sofern noch mitstrampelt)

150Wh	Gesamtenergie

Aufteilung der Energie bergabwärts:

15%	Rollwiderstand
20%	Luftwiderstand (bergab höher, da schneller)
65%	Hubarbeit (die verbremst werden müßte)

ergibt:

22,5Wh	Rollwiderstand
30Wh	Luftwiderstand
97,5Wh	**Restenergie Hubarbeit für Nutzbremse**

Wirkungsgradkette Radfahrer:

0,90	Kette, Übersetzung;

Wirkungsgradkette Antrieb:

0,95	Akku interner Widerstand Entladung
0,85	Schaltwandler Antriebsstrom (U und f)
0,85	Motorwirkungsgrad (magn-mech)

0,69	Gesamtwirkungsgrad angetrieben

Wirkungsgradkette Rekuperation:

0,90	Akku mit internen Ladungsverlusten
0,85	Schaltwandler Antriebsstrom (U und f)
0,85	Motorwirkungsgrad (magn-mech)

0,65	Gesamtwirkungsgrad nutzgebremst

63,40Wh	Rekuperationsenergie mit Wirkungsgraden
145,69Wh	Energieentnahme Akku mit Wirkungsgraden
43,52%	**Prozentuale Rückspeisung** mit berücksichtigten Wirkungsgradverlusten der Gesamtwirkungsgradketten

Anmerkung:
Dieser Wert wird erreicht, wenn bei der Abwärtsfahrt nur wenige Abschnitte so steil sind, dass zusätzlich mechanisch gebremst werden muss. Im Weiteren wird bei bei Abwärtsfahrt auch nicht mit hoher Geschwindigkeit gerollt, so dass der Luftwiderstand viel Energie verbraucht. Die meisten Räder haben als Rekuperationsgrenzleistung 100W, allerdings wären bis zu 200W notwendig um die hohe Rückspeisung bei den meisten Strecken auch tatsächlich zu erreichen, da hier praktisch nur noch sehr selten in Teilstücken mechanisch zugebremst werden müßte.

Die Bilanz für 100% Motorbetrieb bergauf und 100% Generatorbetrieb bergab wäre die Multiplikation aller Wirkungsgrade:

0,75 Hubarbeit mit Abzug der Verluste bergauf
0,69 Wirkungsgradkette Motorbetrieb
0,65 Hubarbeit mit Abzug der Verluste
0,65 Wirkungsgradkette Generatorbetrieb
Ergibt: 0,218 also rund 21%

Aus den beiden extremen Beispielen lassen sich folgende Regeln erkennen:

- Die ungünstigste Bilanz mit Rekuperation ergibt sich jeweils, wenn mit maximaler Motorunterstützung bergauf gefahren wurde.
- Je mehr Energie über den Pedalantrieb aufgebracht wurde, desto besser wird die Bilanz mit Rekuperation.

Grob überschlagen für die meisten Bergstreckenprofile (Straßen, Forststraßen, Wege) würde sich folgendes Bild für die Verlängerung der Reichweite in Abhängigkeit von der Bremsleistung der Rekuperation ergeben:

max. Bremsleistung (Akkuladung in W):	Prozentualer Gewinn:	Prozent des maximal möglichen Wertes:
0 W	'0 %	'0 %
100 W	15 %,	'34 %
200 W	30 %,	'68 %
300 W	38 %,	'86 %
400 W	42 %,	'95 %
1 kW	'44 %	'99 %
Unter der Voraussetzung die maximale Nutzbremsleistung wird bereits ab 15-20 km/h erreicht. Im Weiteren wird dabei auch angenommen, dass mit Zunahme der Bremsleistung auch das maximale Moment im Generatorbetrieb des Motors zunimmt bis etwa zur Leistung von 400W.		

Ab einer Bremsleistung von 300W wird nur noch sehr wenig Rekuperationsenergie verschenkt, so dass sich ab hier ein weiterer Aufwand nicht mehr lohnt.

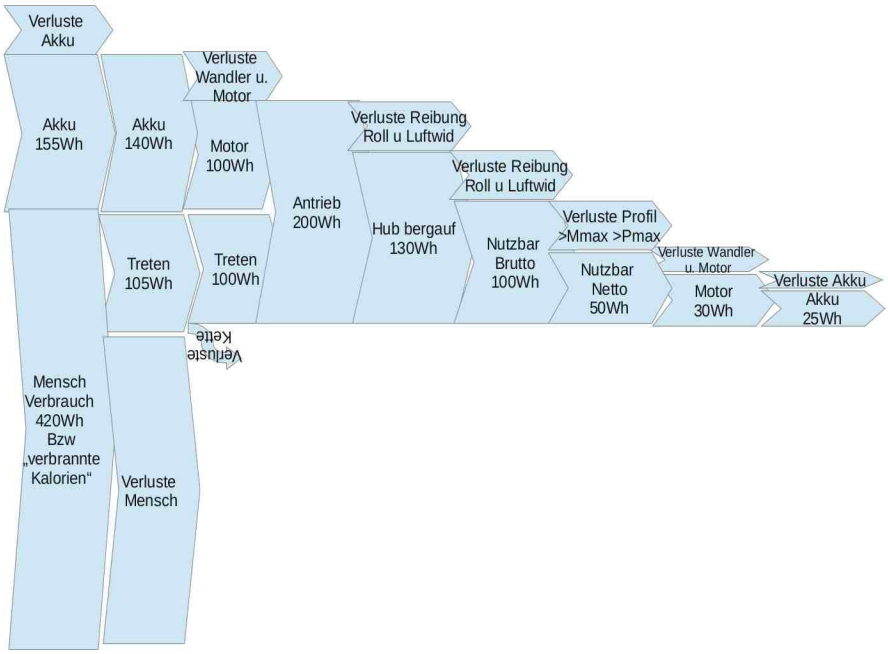
Bei mir würde der Gewinn unter Umständen etwas größer ausfallen, da ich bei den flacheren Gefällestücken zusätzlich wieder etwas in die Pedale treten würde, was wiederum der Energiegewinnung dienen würde. Der Grund wäre, dass die Bewegung die Abkühlung durch den Fahrtwind mildern würde. Nach der anstrengenden Hochfahrt, würden bergab die Beinmuskeln zu sehr kalt werden und verstärkt das Risiko für die eine oder andere negativen Folge (Muskelkater, Zerrungen, Krampf).

Zuletzt sei noch angemerkt, dass sich die niedrigen Werte einer Reichweitenverbesserung von nur 5% von Herstellern, die keine Rekuperation im Programm haben hiermit auch begründen läßt. Bei einer 90% Motorunterstützung könnten nach der Wirkungsgradkette ungefähr 24% erreicht werden, da aber nach dem Bremsprofil mit 100W Rekuperationsleistung nur durchschnittlich 34% genutzt werden können, ergibt sich ein Wert von 8% und wenn die Hälfte des Streckenprofils eben ist, dann ergeben sich nur 4% Reichweitenverlängerung.

Wird mit einer durchschnittlichen Motorunterstützung von 50% gerechnet, als Bremsprofil angenommen, dass man nicht viel steile Downhillstrecken bergab fährt, dann kann natürlich bei nur maximal 100W Rekuperationsleistung durchschnittlich ungefähr die Hälfte genutzt werden. Dort wo man gerne mit dem Pedelec fährt, ist nur ein drittel der Straßen eben. Es kann somit viel mehr zurückgespeist werden und liegt im Bereich von 15% Reichweitenverlängerung.

Ein Fahrer, der sich kennlinienoptimiert verhält, kann natürlich mit angepasster Fahrweise auch mit nur maximal 100W Rekuperationsleistung 30% Reichweitenverlängerung erreichen. Da dies aber auch nur ein Bruchteil der Ingenieure und Physiker beim Pedelecfahren so hinbekommen (das Problem es selbst in die Praxis umzusetzen), hat dies keine große Bedeutung auf dem Markt. Bei maximalen Rekuperationsleistungen im Bereich von 200W bis 300W ist es nicht mehr notwendig sich kennlinienoptimiert zu verhalten um deutlich bessere Reichweitenverlängerungen mittels Rekuperation zu erreichen.

Die Beispielskizze eines Sankey-Diagramms für eine Rekuperation, die auch den Wirkungsgrad des Menschen beinhaltet. Noch ungünstiger schneidet der Antrieb durch den Fahrer ab, wenn der Primärenergieverbrauch für die Erzeugung von Lebensmitteln hinzugenommen wird.



9.2 Technische Zusammenhänge bei der Rückspeisung

Li-Akkus sind empfindlicher als NiMh und haben daher besondere Schutzschaltungen integriert. Die Zellen müssen vor Tiefentladung, Überladung und zu großer Erwärmung geschützt werden. Für die Ladung und auch die Entladung gibt es daher besondere Balancer-Schaltungen für jede Zelle. Diese Schutzkomponenten begrenzen die Leistungen am stärksten bei der Energieaufnahme. Somit liegen die maximalen Rückspeisungsleistungen meistens im Bereich von einem drittel bis einem viertel der Kapazität des Lithiumakkupacks. Aus dem Grunde haben die Pedelecs eine Rückspeisung von maximal 100W ab Akkukapazitäten von 300 bis 350 Wh. Somit konnte die Rekuperation erst ab der Verwendung von größere Akkukapazitäten zugelassen werden.

Mit NiMh (Standardzellen) würde ein Akkupack mit 60 Wh zwischen 600-700 Gramm wiegen. Diese können je nach Belastungsdauer entsprechend höhere Rückspeiseströme vertragen. Je nach Typ und Wärmezustand wären zwei bis fünf Minuten bis zum vierfachen als Peakleistung in W gegenüber der Kapazität in Wh (Ladung mit max. 4C) möglich. Die NiMh-Akkus sind also viel unkritischer und der Gewichtsnachteil ist überraschenderweise gar nicht so groß.

Auf Grund der flachen Spannungskennlie gegenüber dem Ladungszustand ist es bei NiMh-Akkus schwieriger eine Anzeige der vorhandenen Kapazität für eine Reichweitenanzeige zu realisieren. Das ist ein selten erwähnter Hauptpunkt, warum die Hersteller für Pedelecs, E-Bikes und auch E-Autos fast durchwegs Li-Akkus bevorzugen. Es wäre für die Rückspeisung aber durchaus interessant beide Typen geschickt zu kombinieren.

Der Vorteil der Rekuperation hängt stark von dem Profil der Fahrtstrecke ab und auch des Fahrverhaltens des Radlers. Die Fahrer mit komplett fehlenden Physikkenntnissen können natürlich

kaum ihren Fahrstil so anpassen um den maximalen Vorteil aus dieser Technik zu ziehen.

Für meine vorgesehenen Fahrten wäre diese Technik aber sehr zu wünschen. Häufig würde ich mit dem Rad einen Forstweg entlang eines Baches die ersten Alpenberge hochfahren. Die Unterstützung des Pedelecs herbei wäre meistens bergauf zwischen 25 bis 50%. Die gleiche Strecke würde ich Rückwärts rollen und statt dauernd an der Bremse zu hängen, würde ich bevorzugen die Rekuperation intensivst zu nutzen. Aktuell muss ich dabei real über 50% der Energie bei der Abfahrt über die Bremse vernichten. Das hat schon einige Bremsklötze verschlissen und die Felgen sehen mittlerweile auch mitgenommen aus. Wer öfters Bergstrecken fährt, wird ein Rad mit einer Bremsscheibenbremse wählen oder nachrüsten.

Damit die Rekuperation eine entsprechend akzeptable Abbremsung bei den meisten Bergabfahrten liefern kann, müßte der Energiespeicher eine Leistungsaufnahmefähigkeit von 200W aufweisen. Bei einer Leistung von nur 100W gibt es bei den Bergstrecken noch zu viele Abschnitte, für die diese Bremsleistung einfach noch zu gering ist und verhältnismäßig viel noch mechanisch gebremst werden muss.

Mit:

$P = F \cdot v = M \cdot n \quad n$ in U/s und $v = 2\pi \cdot n \cdot r$

ergibt sich:

$M_{max} = 40$ Nm entspricht $F_{max} = 120\,N$

$v_{max} = \frac{P_{max}}{F}$ Hyperbel

Für ein Gesamtgewicht von Rad plus Fahrer von 100kg und 100W maximale Bremsleistung ergeben sich folgende Höchstgeschwindigkeiten:

Gefälle in %	Resultierende Kraft F in Gefällerichtung	Maximale Geschwindigkeit für 100W Bremsleistung	Bemerkungen
'2 %	20 N	18 km/h (>25km/h für 200W)	Bei höheren Geschwindigkeiten nur noch Teilbremsung.
'4 %	40 N	9 km/h (18km/h für 200W)	Bei höheren Geschwindigkeiten nur noch Teilbremsung und das Rad wird schneller bis der Luftwiderstand den weiteren Anstieg begrenzt.
'10 %	100 N	4 km/h (8km/h für 200W)	Bei der niedrigen Geschwindigkeit sinkt im Generatorbetrieb das maximale Moment. Somit nur noch Teilbremsung. Außnahme sinusoidal conrol with complementay PWM kann hier noch Vollbremsung.
'12 %	120 N (40 Nm)	3 km/h (6km/h für 200W)	Bei der niedrigen Geschwindigkeit sinkt im Generatorbetrieb das maximale Moment. Somit nur noch Teilbremsung. Außnahme sinusoidal conrol with complementay PWM kann hier noch Vollbremsung.
>'12 %	>120 N (>40 Nm)	Nur noch Teilbremsung	Nur noch Teilbremsung möglich. Unabhängig von der maximalen Leistung der Rekuperation. Für Vollbremsung Motoren mit höherem maximalen Moment d.h. auch im Bremsbetrieb notwendig.
'20 %	200 N	Nur noch Teilbremsung	Nur noch Teilbremsung möglich. Unabhängig von der maximalen Leistung der Rekuperation. Für Vollbremsung Motoren mit höherem maximalen Moment d.h. auch im Bremsbetrieb

			notwendig. Hier ca. 70 Nm.

Anzumerken wäre noch, dass Steuerungen der Technik „Sinusoidal Motor Control mit Complementary Bipolar/Uniplar PWM (4 Quadranten)“ so gesteuert werden können, dass das maximale Bremsmoment bis zum vollständigen Stillstand möglich ist.

Anhand der Tabelle läßt sich gut ablesen, wo die technischen Grenzen liegen bei der Rekuperation und die eine oder andere Frage aus vorherigen Kapitel dürfte sich somit klären. Nicht nur die maximale Rekuperationsleistung müßte mindestens 200W betragen, sondern auch des maximale Moment des Antriebes (Umgerechnet auf des 26'-Hinterrad) müßte mindestens 80Nm betragen um ein gutes Rekuperationsverhältnis zu ermöglichen.

Damit können gut zwei Drittel der Energie im Streckenmix (bergiges und hügeliges Gelände) geerntet werden. Aus dem verbleibenden Drittel würde eine Erhöhung der maximalen Rekuperationsleistung am meisten plus beim Energieernteergebnis bringen. Mehr Moment bringt dann nur bei einem Fahrstiel mit vielen sehr steilen Gefällestrecken im Gelände. Somit ergibt sich folgendes Ranking für die Ausnutzung Rekuperation beim Pedelec:

1. M: 40Nn & $P_{rekuperation}$: 100W
2. M: 60..80Nm & $P_{rekuperation}$: 200W
3. M: 80Nm & $P_{rekuperation}$: 300..400W
4. M: 120Nm & $P_{rekuperation}$: 400..500W

Anzumerken wäre noch, dass ab der dritten Stufe der Aufwand gegenüber dem zusätzlichen Rekuperationsenergieertrag überproportional steigt. Der Unterschied für die Auslegung der Rekuperation zwischen dem 25km/h und 45km/h Pedelec ist dabei gering. Es wird beim 45km/h Modell empfohlen bei den Stufen jeweils bei der Auslegung an der maximalen Leistung auszulegen.

Bei Momenten über 80 Nm, die auch Steigungen oder Gefälle über 24% rekuperieren, wird es notwendig werden einen Teil des bremsenden Generatormomentes auf Vorderrad zu legen. Im Gelände auf gekiesten Forststraßen oder Wegen ähnlicher schwieriger Zustände würde das Hinterrad sonst zu sehr zum Rutschen oder Kurzblockieren neigen. Beim Vorderrad muss allerdings auch das Bremsmoment abrupt abgebrochen werden können mit mindestens den gleichen kurzen Reaktionszeiten, wie die mechanische Hebelbremse am Lenkrad damit die Zahl der Stürze nicht auf Grund der Technik steigt. Sehr steile Gefälle sollten sowieso langsam gefahren werden. Die Geschwindigkeit sollte dabei im Bereich des zu Fuß Gehens liegen. Gleichzeitig hilft das auch die Auslegung der maximale Rekuperationsleistung im Zaum zu halten.

9.3 Berechnungen zum Bergabwärtsrollen

Umgekehrt ist es interessant auszurechnen, welche Geschwindigkeiten beim Bergabwärtsrollen erricht werden könnten. Die Berechnung ohne Roll- und Luftwiderstände soll hier an einem Beispiel vorgeführt werden. Auf der bekannten Kesselbergstraße gibt es nach dem Höhenprofil einen Streckenabschnitt von 110m Länge mit einem Höhenunterschied von 21m. Das entspricht einem Gefälle von 20%.

Wenn diese Strecke ohne Anfangsgeschwindigkeit gerollt würde, errechnet sich eine Endgeschwindigkeit von 73 km/h. Berechnet wird das Ganze mit dem Energieansatz.

$$E_{kin} = E_{pot}$$

$$\frac{1}{2} m v^2 = m g h$$

Die Masse läßt sich auf beiden Seiten kürzen und die Gleichung nach v umstellen:

$$v^2 = 2 g h$$

$$v = \sqrt{2 g h} = \sqrt{2 \cdot 10\,[\text{m/s}^2] \cdot 21\,[\text{m}]} = 20{,}5\,[\text{m/s}] = 73\,[\text{km/h}]$$

Zum Vergleich die Rechnung mit einer Anfangsgeschwindigkeit von 25 km/h:

$$\sum E_{kin} = E_{pot}$$

$$\frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 = m g h$$

Die Masse läßt sich auf beiden Seiten kürzen und die Gleichung nach v umstellen:

$$v_2^2 = 2 g h + v_1^2$$

$$v_2 = \sqrt{2 g h + v_1^2} = \sqrt{2 \cdot 10\,[\text{m/s}^2] \cdot 21\,[\text{m}] + (25/3{,}6)^2} = 21{,}6\,[\text{m/s}] = 77{,}6\,[\text{km/h}]$$

Sicherlich hätten viele 98 km/h erwartet, aber das Rechenergebnis von nur 77 km/h stimmt.

Bei der Berücksichtigung der Fahrwiderstände durch Reibung und Luft ist es einfacher mit den Kräften zu rechnen. Bei erreichen der Höchstgeschwindigkeit besteht ein Gleichgewicht zwischen Hangabtriebskraft und Widerstandskräften.

$$F_{Gefaelle} = F_{Rollwid} + F_{Luftwid}$$

Luftwiderstand:

$$F_{LW} = c \cdot A \cdot \frac{\rho}{2} \cdot v^2 = 1{,}1 \cdot 0{,}6 \cdot \frac{1{,}3}{2} v^2 = 0{,}429 \cdot v^2$$

Luftdichte ρ ca. 1,1...1,3 kg/m^3 je nach Luftdruck, Temperatur und Feuchtigkeit;

A: Querschittsfläche in m$^{2;}$ c: Luftwiderstandsbeiwert (dimensionslos); v: Geschwindigkeit in m/s; F: Kraft in N;

Der Rollwiderstand wird mit ungünstigen 6N/100kg angenommen, der bei Mountainbikes mit groben Reifen vorkommen kann. Die Hangabtriebskraft bei 20% Gefälle für 100kg Gesamtgewicht beträgt 196N.

$$F_{LW} = c \cdot A \cdot \frac{\rho}{2} \cdot v^2 = 1{,}1 \cdot 0{,}6 \cdot \frac{1{,}3}{2} v^2 = 0{,}429 \cdot v^2$$

$$196 = 0{,}429 \cdot v^2 + 6$$

$$v^2 = 190/0{,}429$$

$$v = \sqrt{190/0{,}429} = 21\,m/s = 76\,km/h$$

Diese Geschwindigkeit ist für das genannte Streckenstück natürlich viel zu gefährlich und die Autos auf dem Abschnitt fahren auch viel langsamer, wegen der folgenden Kurven.

Für verschiedene Steigungen ergäben sich folgende maximalen Geschwindigkeiten:

$$v=\sqrt{\frac{(F_{Gefälle}-F_{Roll})}{0{,}429}}$$

Steigung in %	Steigung in Grad	F_Gefaelle in N	E in Wh/km	vmax km/h
1	0,57	10,0	2,78	10,99
2	1,15	20,0	5,55	20,57
5	2,86	49,9	13,87	36,43
10	5,71	99,5	27,64	53,15
20	11,31	196,1	54,48	75,79
30	16,70	287,4	79,82	92,19
60	30,96	514,5	142,92	123,94

Wenn ein Teil der potentiellen Energie für die Rekuperation abgeschöpft würde, ergäbe sich folgender Rechenweg und Tabelle:

$$F_{Gefaelle}=F_{Rollwid}+F_{Luftwid}+F_{Reku}=F_{Rollwid}+F_{Luftwid}+k\cdot F_{Gefaelle}$$

$$(1-k)\cdot F_{Gefaelle}=F_{Rollwid}+F_{Luftwid}$$

Für k von 0..1 beziehungsweise k=0 für 0%, k=0,1 für 10%, k=1 für 100%.

$$v=\sqrt{\frac{((1-k)\cdot F_{Gefälle}-F_{Roll})}{0{,}429}}$$

Steigung in %	Steigung in Grad	F in N	E in Wh/km	vmax km/h	P_fiktiv Gefaelle bei vmax	vmax bei 10% Reku	P_Reku 10% [W]	vmax bei 30% Reku	P_Reku 30%	vmax bei 50% Reku	P_Reku 50%	vmax bei 70% Reku	P_Reku 70%	vmax bei 90% Reku	P_Reku 90%	P_fiktiv Gefälle	P_Verluste
0,5	0,29	5,0	1,39	Err:502	Err:502	Err:502	Err:502	Err:502	Err:502	Err:502	Err:502	Err:502	Err:502	Err:502	Err:502	Err:502	Err:502
1	0,57	10,0	2,78	10,99	30,54	9,52	2,64	5,50	4,58	Err:502	Err:502	Err:502	Err:502	Err:502	Err:502	Err:502	Err:502
2	1,15	20,0	5,55	20,57	114,25	19,04	10,58	15,55	25,91	10,99	30,54	0,00	0,00	Err:502	Err:502	Err:502	Err:502
5	2,86	49,9	13,87	36,43	505,42	34,30	47,58	29,58	123,09	23,94	166,04	16,47	159,96	Err:502	Err:502	Err:502	Err:502
10	5,71	99,5	27,64	53,15	1468,93	50,24	138,86	43,85	363,59	36,35	502,40	26,84	519,32	10,92	271,73	301,92	30,19
20	11,31	196,1	54,48	75,79	4128,64	71,77	390,99	62,98	1029,25	52,74	1436,48	39,95	1523,55	20,28	994,25	1104,73	110,47
30	16,70	287,4	79,82	92,19	7358,78	87,36	697,29	76,78	1838,58	64,49	2573,83	49,22	2750,31	26,21	1882,66	2091,85	209,18
60	30,96	514,5	142,92	123,94	17713,41	117,50	1679,34	103,43	4434,78	87,12	6225,58	66,94	6697,28	37,05	4766,13	5295,70	529,57

Die einfache Formel ist für die Berrechnung nur im oberen Geschwindigkeitsbereich geeignet. Deshalb ergeben sich im unteren Geschwindigkeitsbereich unter der Wurzel negative Werte und in den betreffenden Zellen steht eine Errormeldung.

Die reale Kennlinie im Generatorbetrieb des Motors ist dabei noch nicht berücksichtigt. Interessant sind die gelb markierten Felder. Für eine gute Energieausbeute mittels Rekuperation müßte die Kennlinie des Generatorbetriebes diesen Bereich mindestens erreichen. Bei 10% Steigung, 270W mechanische Bremsleistung des Motors, bei 11 km/h. Unter Berücksichtigung der weiteren Umwandlungsverluste würde in dem Falle der Akku eine Leistung von etwa 200W aufnehmen. Bisherige Modelle sind begrenzt auf maximal 100W Rekuperationsleistung.

Anhand der Tabelle läßt sich aber auch ablesen, dass ein Pedelecfahrer, der bevorzugt mit der maximalen Geschwindigkeit bergab zu Rollen natürlich nicht viel Energie für die Rekuperation übrig läßt.

Für eine treffendere Berechnung wird es aber notwendig die Kennlinie des Generators besser anzunähern. Ein vorangestellter Exponentialfunktionsterm bildet annähernd die Kennlinie im Generatorbetrieb nach. Die Gleichung läßt sich allerdings nicht mehr analytisch nach der Geschwindigkeit v auflösen. In der Mathematik gibt es für diese Fälle das Iterationsverfahren oder der Wert wird per Näherungsverfahren aus eine Tabelle ermittelt.

$$F_{Gefaelle} = F_{Rollwid} + F_{Luftwid} + F_{Reku}$$

$$F_{Gefaelle} = F_{Rollwid} + 0{,}429 \cdot v^2 + \left(1 - 2{,}7^{(-0{,}1 * v^3)}\right) \cdot \frac{P_{max}}{v}$$

Tabelle für 8% Gefälle und Rekuperation P_max 100W:

v in m/s	v in km/h	F_Brems Reku	F_Wid_R+L	F_Wid gesamt	F_Gefaelle	F_Diff	P_max Reku	P_Brems Reku
1	3,6	9,5	6,4	15,9	80	64,1	100	9,5
2	7,2	27,4	7,7	35,1	80	44,9	100	54,8
3	10,8	31,1	9,9	40,9	80	39,1	100	93,2
4	14,4	25,0	12,9	37,8	80	42,2	100	99,8
5	18,0	20,0	16,7	36,7	80	43,3	100	100,0
6	21,6	16,7	21,4	38,1	80	41,9	100	100
7	25,2	14,3	27,0	41,3	80	38,7	100	100
8	28,8	12,5	33,5	46,0	80	34,0	100	100
9	32,4	11,1	40,7	51,9	80	28,1	100	100
10	36,0	10,0	48,9	58,9	80	21,1	100	100
11	39,6	9,1	57,9	67,0	80	13,0	100	100
12	43,2	8,3	67,8	76,1	80	3,9	100	100
13	46,8	7,7	78,5	86,2	80	-6,2	100	100
14	50,4	7,1	90,1	97,2	80	-17,2	100	100
15	54,0	6,7	102,5	109,2	80	-29,2	100	100
16	57,6	6,3	115,8	122,1	80	-42,1	100	100

Näherungsverfahren (Interpolation) zwischen zwei Punkten:

$$y = m \cdot \delta x + y_1 = \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \delta x + y_1$$

Für obige Tabelle gelb markierte Werte:

$$y = \frac{46{,}8 - 43{,}2}{-6{,}2 - 3{,}9} \cdot (0 - 3{,}9) + 43{,}2 = 44{,}59$$

In dem Falle würde die Geschwindigkeit beim Bergabrollen bei etwa 45 km/h stagnieren.

Bis zu einer Steigung von 3% (max 4%) und maximalen Geschwindigkeit von 10 km/h, würde es einen stabilen Betriebspunkt bei niedriger Geschwindigkeit geben. Der Gleichgewichtspunkt mit niedriger Geschwindigkeit würde eine hohe Rekuperationsausbeute bringen und würde nach der Tabelle 75% betragen. Der Gleichgewichtspunkt mit höher Geschwindigkeit würde nur eine geringe Rekuperationsausbeute bringen und nach der Tabelle nur 10% betragen ohne Berücksichtigung des Generatorwirkungsgrades von Motor und Leistungselektronik.

Anbei ein Beispiel mit zwei Stabilitätspunkten (8 km/h und 39 km/h) bei 8% Gefälle und 250W maximale Rekuperationsleistung:

v in m/s	v in km/h	F_Brems	F_Wid_R+L	F_Wid	F_Gefaelle	F_Diff	P_max	P_Brems
1	3,6	23,6	6,4	30,1	80	49,9	250	23,6
2	7,2	68,5	7,7	76,2	80	3,8	250	137,1
3	10,8	77,6	9,9	87,5	80	-7,5	250	232,9
4	14,4	62,4	12,9	75,3	80	4,7	250	249,6
5	18,0	50,0	16,7	66,7	80	13,3	250	250,0
6	21,6	41,7	21,4	63,1	80	16,9	250	250
7	25,2	35,7	27,0	62,7	80	17,3	250	250
8	28,8	31,3	33,5	64,7	80	15,3	250	250
9	32,4	27,8	40,7	68,5	80	11,5	250	250
10	36,0	25,0	48,9	73,9	80	6,1	250	250
11	39,6	22,7	57,9	80,6	80	-0,6	250	250
12	43,2	20,8	67,8	88,6	80	-8,6	250	250

Die 250W Tabelle wurde gewählt, da sich aus dieser umgekehrt auch ablesen läßt für eine Schätzung, welcher Anteil an Hubarbeit bergauf gespeichert wird anhand des Vergleichs der Kräfte der Rkuperation mit der Summe Roll- und Luftwiderstand.

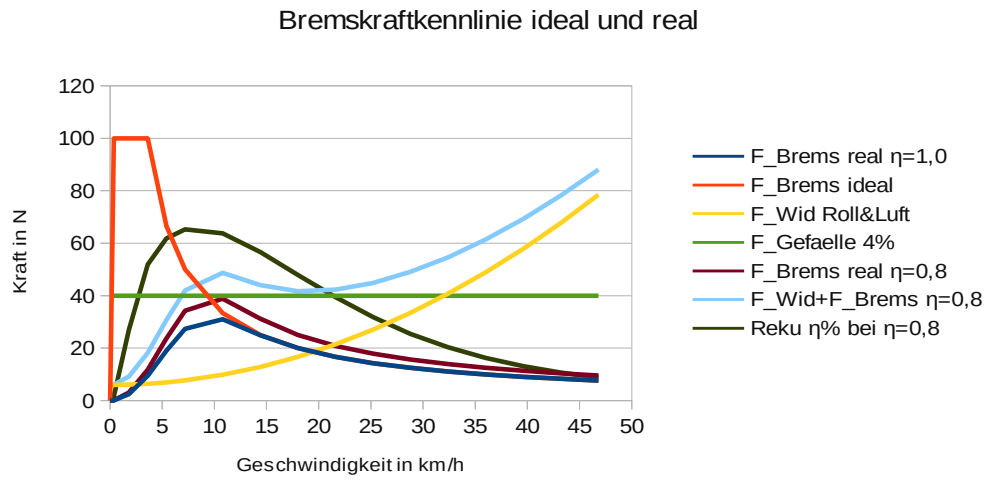
Festgehalten werden kann, dass ein Pedelecfahrer, der bevorzugt mit der maximalen Geschwindigkeit bergab zu Rollen natürlich nicht viel Energie für die Rekuperation übrig läßt. Anbieter eines Antriebssystems ohne Rekuperation, vor allem wenn Reku bei dessen technischen Lösung nicht realisierbar ist, werden daher auch immer diese Fahrprofile für einen Vergleich heranziehen.

Für übliche Pedelecs mit maximal 100W Rekuperation und auf Strecken mit 4% Gefälle sieht der Verlauf ungefähr nach folgenden Tabelle aus.

v in m/s	**v in km/h**	**F_Brems**	**F_Wid_R+L**	**F_Wid**	**F_Gefaelle**	**F_Diff**	**P_max in W**	**P_Brems in W**	**Reku-Anteil in %**	**Reku-Anteil in %**
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**
1	3,6	9,5	6,4	15,9	40	24,1	100	9	60	24
2	7,2	27,4	7,7	35,1	40	4,9	100	55	78	69
3	10,8	31,1	9,9	40,9	40	-0,9	100	93	76	76
4	14,4	25,0	12,9	37,8	40	2,2	100	100	66	62
5	18,0	20,0	16,7	36,7	40	3,3	100	100	54	50
6	21,6	16,7	21,4	38,1	40	1,9	100	100	44	42
7	25,2	14,3	27,0	41,3	40	-1,3	100	100	35	35
8	28,8	12,5	33,5	46,0	40	-6,0	100	100	27	27
9	32,4	11,1	40,7	51,9	40	-11,9	100	100	21	21
10	36,0	10,0	48,9	58,9	40	-18,9	100	100	17	17
11	39,6	9,1	57,9	67,0	40	-27,0	100	100	14	14
12	43,2	8,3	67,8	76,1	40	-36,1	100	100	11	11
13	46,8	7,7	78,5	86,2	40	-46,2	100	100	9	9

Die Spalte 11 enthält den Rekuperationsanteil der mechanisch an der Motor-/Generatorachse zur Verfügung steht. Im Akku landet letztendlich weniger, da noch die Wirkungsgradkette Generator-, Leistungselektronik- und Akkuwirkungsgrad zu berücksichtigen sind.

Wenn bei höheren Steigungen wenigstens der maximal noch mögliche Anteil rekuperiert werden soll, so sollte die Fahrgeschwindigkeit sich im Bereich von 11 km/h bewegen. Bei hohem Rekuperationsanteil und noch mäßig schnellem Fahren würde sich als Fahrweise anbieten, das Pedelec nicht mehr als bis 20 km/h auf dem Gefälle beschleunigen zu lassen und immer wieder bis auf 10 km/h zusätzlich mechanisch abzubremsen.



$$F_{Brems\,real} = \left(1 - 2{,}7^{\left(-0{,}1 * v^3\right)}\right) * P_{max} / v$$

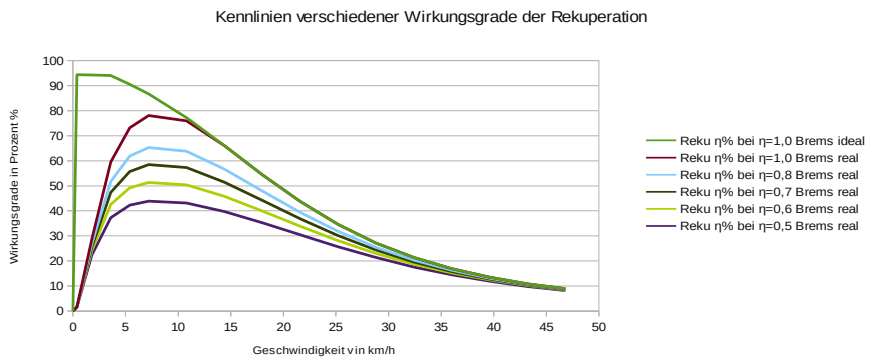
$$F_{Bremsideal} = P_{max} / v \quad \text{für} < F_{max} \text{ hier 100N sonst maximal } F_{max}$$

$$F_{Roll+Luft} = 0{,}429 * \left(v + v_{Wind}\right)^2 + 6$$

$$F_{Wid} + F_{Bremsreal\,\eta=0.8} = F_{Roll+Luft} + F_{Bremsideal} / \left(F_{Brems\,ideal} / \eta_{0.8}\right)$$

$$\eta_{Reku\,\%\,\eta=0.8} = F_{Brems\,real} / \left(F_{Brems\,real} / \eta_{0.8} + F_{Roll+Luft}\right) * 100$$

Das Diagramm zeigt die Bremskraftlinie für den idealen Fall, realen Fall mit Wirkungsgrad 0,8 für die Umwandlung und den sich daraus ergebenden Wirkungsgrad bei der Rekuperation mit zusätzlicher Berücksichtigung der Fahrwiderstandsverluste Rollreibung und Luftwiderstand.



$$F_{Brems\,real} = \left(1 - 2{,}7^{(-0{,}1 * v^3)}\right) * P_{max} / v$$

$$F_{Bremsideal} = P_{max} / v \quad \text{für} < F_{max} \text{ hier 100N sonst maximal } F_{max}$$

$$F_{Roll+Luft} = 0{,}429 * (v + v_{Wind})^2 + 6$$

$$F_{Brems\,ideal\,\eta=1.0} = F_{Bremsideal} / (F_{Brems\,ideal} + F_{Roll+Luft}) * 100$$

$$\eta_{Reku\,\%} = F_{Brems\,real} / (F_{Brems\,real} / \eta_{1.0} + F_{Roll+Luft}) * 100$$

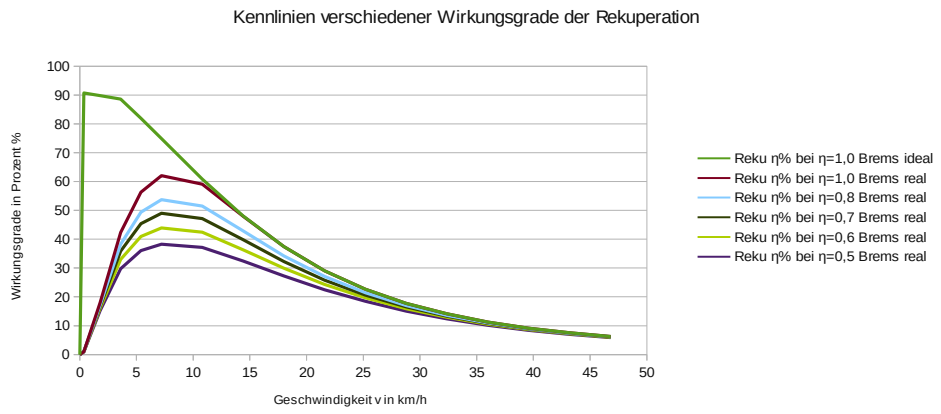
$$\eta_{Reku\,\%} = F_{Brems\,real} / (F_{Brems\,real} / \eta_{0.8} + F_{Roll+Luft}) * 100$$

$$\eta_{Reku\,\%} = F_{Brems\,real} / (F_{Brems\,real} / \eta_{0.7} + F_{Roll+Luft}) * 100$$

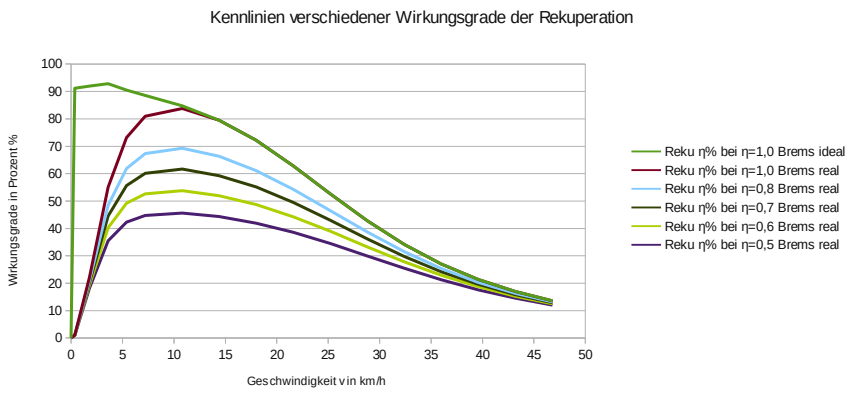
$$\eta_{Reku\,\%} = F_{Brems\,real} / (F_{Brems\,real} / \eta_{0.6} + F_{Roll+Luft}) * 100$$

$$\eta_{Reku\,\%} = F_{Brems\,real} / (F_{Brems\,real} / \eta_{0.5} + F_{Roll+Luft}) * 100$$

Das gleiche Diagramm mit 10 km/h Gegenwind:



Das gleiche Diagramm mit 10 km/h Rückenwind:



Vieles aus dem Dokument ist bereits im Internet auf verschiedenen Seiten zu finden, aber eine Erklärung der Hintergründe und brauchbare Beschreibung, welches Fahrverhalten notwendig wäre um maximale Rekuperation auf Gefällestrecken zu erzielen war bis Stand der Monate Mai/Juni 2015 noch nirgends zu finden.

10 Interessante Entwicklungen

10.1 Radfelgenmotor und Reibradmotor

Eine interessante Entwicklung stellt der Radfelgenmotor von der Firma Velogical (Köln) dar. Für die Nachrüstung bei normalen Fahrrädern als Dauerlösung oder auch nur bei Bedarf stellt dies eine interessante Lösung dar.

In der Vergangenheit gab es auch verschiedene Lösungen mit angedrückten Rollen auf dem Radmantel. Die Lösung mit zwei gegenüberliegenden Felgenmotoren ist meiner Ansicht nach hier eine wesentlich technisch bessere und gelungene Alternative.

Von den Ausführungen mit Rollen auf den Radmantel meiner Ansicht nach die gelungenste Lösung gibt es von der Firma add-e in Österreich bei Villach, die einen Reibradantrieb anbietet, der am Rahmen zwischen Tretlager und Rad montiert wird. An dieser Position befanden sich bei vielen Fahrrädern früher der Ständer. Das Reibrad hat ungefähr einen Durchmesser von 6cm und liegt auf der Lauffläche auf. Für die Nachrüstung bei normalen Fahrrädern als Dauerlösung oder auch nur bei Bedarf stellt dies eine interessante Lösung dar.

Bei Antriebe (Velospeeder und add-e) nutzen das Moment, dass sich bei schräger Ausrichtung ergibt um dadurch eine Antriebskraftabhängigkeit des Andruckes nutzen zu konnen. Ein mehr an Moment führt zu erwünschtem höherem Anpressdruck. Bei geringerem Moment ist der Anpressdruck geringer und die mechanischen Verluste werden dadurch auch reduziert.

Im Bremsbetrieb sind die Kraftrichtungen leider umgekehrt. Dadurch fällt bei der Rückspeisung das maximale Moment im Generatorbetrieb geringer aus als im Motorbetrieb. Im niedrigen Geschwindigkeitsbereich bleiben damit diese beiden Lösungen bei der Bremswirkung hinter den Hinterradmotoren noch zurück. Auf der anderen Seite können diese Antriebsmotoren viel günstiger als Hinterradmotoren hergestellt werden, so dass durchaus ein weiterer Motor in umgekehrter schräger Ausrichtung jeweils für den Bremsbetrieb und als Leistungsgenerator für Beleuchtung oder Laden beim Fahren oder aufgebockt als Fitnessgerät verwendet werden könnte. Eine zusätzliche hinzuschaltbare Feder zur Erhöhung des Andruckes für die Rekuperation wäre auch eine denkbare Lösung ohne weitere Motoren zu benötigen.

Beim bürstenlosen Motor BLDC ist der Unterschied für die 1 bis 4 Quadrantenfähigkeit einzig in der Ansteuerung begründet.

- Six Step Motor Control (Methode für Phasenumlauf/Drehung)
- Sinusoidal Motor Control (Methode für Phasenumlauf/Drehung)
- Independent Bipolar/Unipolar PWM (2 Quadranten)
- Complementary Bipola/Uniplar PWM (4 Quadranten)

Diese gibt es als kleinen SMD-Vielfüssler, die jeweils 6 MOSFET ansteuern. Für 4-Quadrantenbetrieb wird meist ein Gehäuse mit vier Pins mehr gewählt um zwei weiteren benötigten Anschlüsse zur Verfügung zu stellen. Die MOSFETs sind in der Regel identisch und auch die maximalen Leistungsdaten unterscheiden sich nur geringfügig (ca. 10%). Wenn ein 1Q SMD-IC vielleicht zwei Euro kostet, kostet ein 4Q SMD-IC halt noch 5 Euro.

Ergänzung des Vergleichs um die Antriebsart des Radfelgenmotors Velospeeder und Reibradantriebes von add-e :

Vergleich der Antriebsarten					
Eigenschaft	**Mittenmotor**	**Vorderradmoto**	**Hinterradmotor**	**Velospeeder**	**Add-e**

en		r		Radfelgenmotor	Reibradantrieb
Rahmen:	Benötigt eigens konstruierten Rahmen im Bereich der Tretlager.	Keine Änderung und kann in die meisten Rahmen eingebaut werden.	Keine Änderung und kann in die meisten Rahmen eingebaut werden.	Keine Änderung und kann in die meisten Rahmen eingebaut werden.	Keine Änderung und kann in die meisten Rahmen eingebaut werden. Ggf. Hinterradständer anbauen.
Bausätze:	Es gibt Bausätze, bei denen muß der Rahmen bearbeitet werden.	Ja, gbt es.	Ja, gibt es.	Ja, kann zum Selbsteinbau bezogen werden.	Ja, kann zum Selbsteinbau bezogen werden.
Motorgewicht:	3-4 kg	3kg (Getriebemotor) 3,5-5kg (Getriebeloser Motor)	3kg (Getriebemotor) 3,5-5kg (Getriebeloser Motor)	ca. 1,6 kg (alle zwei Motoren zusammen mit Halterungen)	ca. 2-3 kg (Motoren zusammen mit Halterungen)
max. Drehmomente:	27-60 Nm	27-60 Nm	27-60 Nm	40 Nm (gemäß Email bereits auch mehr erreicht)	ca. 80 Nm errrechnet (gemäß Email, Übersetzung gerechnet)
Schwerpunktlage:	Liegt tiefer als bei Radnabenmotoren	Liegt höher als bei Mittenmotoren.	Liegt höher als bei Mittenmotoren.	Einfluss vernachlässigbar, da geringstes Motorgewicht.	Geringer und tiefer als bei Mittenmotoren.
Ruperation / Nutzbrems-betrieb	Nicht möglich, wegen Freilauf. (Freilauf der Kettenschaltung)	Nicht möglich bei Motoren mit Freilauf. Ja, ist möglich, aber auf dem Markt kaum erhältlich.	Nicht möglich bei Motoren mit Freilauf. Ja, gibt es auf dem Markt. (meist auf max. 100W begrenzt)	Technisch möglich, bei dem Modell 2014 und auch 2015 noch nicht realisiert.	Technisch möglich, nicht realisiert.
Verschleiß Kette	Erhöht den Verschleiß der Kette, da der Antrieb auf die Kette wirkt.	Kein Mehrverschleiß der Kette.	Kein Mehrverschleiß der Kette.	Kein Mehrverschleiß der Kette.	Kein Mehrverschleiß der Kette.
Verschleiß Zahnkränze	Erhöht den Verschleiß der Zahnkränze, da der Antrieb auf die Kette wirkt.	Kein Mehrverschleiß der Zahnkränze.	Kein Mehrverschleiß der Zahnkränze.	Kein Mehrverschleiß der Zahnkränze.	Kein Mehrverschleiß der Zahnkränze.
Mitnutzung von Übersetzungen	Ja, da der Antrieb auf die Kette wirkt bzw. auf die Tretachse.	Nein, da der Antrieb direkt auf das Rad wirkt.	In der Regel Nein, da der Antrieb direkt auf das Rad wirkt. Es gibt aber Varianten mit integrierten Nabengetriebe, die die Übersetzung mit nutzen.	Nein, da der Antrieb direkt auf das Rad wirkt.	Nein, da der Antrieb direkt auf das Rad wirkt.
Verschleiß Felgen	Nein	Nein	Nein	Gering (Gummiring auf Alu oder Stahl, Verschleiß durch Felgenbremse ist höher; mit Nutz-	Nein. Der Verschleiß des Mantels ist etwas höher, dh etwas früher das Profil

				bremse geringerer Verschleiß, als andere Modelle ohne Nutz-bremse).	abgelaufen. Meist altern jedoch die Mäntel schneller, so dass dies kosten-neutral bleibt.
Verschleiß-/ Ausfallge-fährdung Antriebsmot ormodule	hoch: Getriebe des Tretlagerantriebe s:	a) mittel: Planetengetriebe (meist wechselbar) b) entfällt bei getriebelosen Direktantriebsm otor	a) mittel: Planetengetriebe (meist wechselbar) b) entfällt bei getriebelosen Direktantriebsmoto r	mittel bis hoch: Gummiring, aber leicht zu wechselndes Verschleißteil	Mittel: Reibrad Haftbelag leicht zu wechselndes Teil.
Fail safe Optionen in Verbindung mit Verschleiß	Kette, Zahnkränze, bei Ausfall, nur noch Schieben möglich.	Anfahrhilfe bis 6km sofern vorhanden kann noch verwendet werden.	Anfahrhilfe bis 6km sofern vorhanden kann noch verwendet werden. Wenn Übersetzungen mit genutzt werden, nur Schieben möglich.	Anfahrhilfe bis 6km sofern vorhanden kann noch verwendet werden.	Anfahrhilfe bis 6km sofern vorhanden kann noch verwendet werden.
Fail safe Optionen in Verbindung mit Motorausfall oder Steuerungsa usfall.	Bei einigen Modellen kann auch der Tretantrieb nicht mehr nutzbar sein.	Fortsetzung der Fahrt mit Tretantrieb ohne Motorunterstütz ung.	Fortsetzung der Fahrt mit Tretantrieb ohne Motorunterstützun g. Wenn Übersetzungen mit genutzt werden, nur Schieben möglich.	Fortsetzung der Fahrt mit Tretantrieb ohne Motorunterstützung. Motor kann auch abgebaut werden.	Fortsetzung der Fahrt mit Tretantrieb ohne Motorunterstützung. Motor kann auch abgebaut werden.
Mitnahme Antriebskom ponenten in ein anderes Rad.	In der Regel nicht möglich.	Meistens möglich Komponenten in ein anderes normales Rad einzubauen für versierte Bastler.	Meistens möglich Komponenten in ein anderes normales Rad einzubauen für versierte Bastler.	Problemloser Umbau in ein anderes Rad möglich.	Problemloser Umbau in ein anderes Rad möglich.
Weiternutzu ng als nur normales Rad ohne Antrieb.	Bedingt möglich.	Normale Hinterradfelge ohne Motor einbauen und E-Teile abmontieren.	Normale Hinterradfelge ohne Motor einbauen und E-Teile abmontieren.	Der Motor kann weggeklappt werden. Somit wie normales Rad zu fahren. Motor kann auch abgebaut werden.	Der Motor kann weggeklappt werden. Somit wie normales Rad zu fahren. Motor kann auch abgebaut werden.
Umbau (Radrahmen) auf anderes Produkt anderer Hersteller.	Rahmen in der Regel so spezifisch, dass nur Produkte des Herstellers verwendet werden können, solange diese noch erhältlich sind.	In der Regel Produkte anderer Hersteller einbaubar.	In der Regel Produkte anderer Hersteller einbaubar.	In der Regel Produkte anderer oder des gleichen Herstellers einbaubar, sogar auch als zusätzliches System;	In der Regel Produkte anderer oder des gleichen Herstellers einbaubar, sogar auch als zusätzliches System;
Ggf. eingebaute Sensoren:	Temperatursenso r, Hallsensor	Temperatursenso r, Hallsensor	Temperatursensor, Hallsensor	Temperatursensor, Hallsensor	Temperatursensor, Hallsensor

Spannungsbereiche:	erhältlich für 24-48V	erhältlich für 24-48V	erhältlich für 24-48V	24-48V, je nach Antriebsleistung (für 25/45km/h)	24-48V, je nach Antriebsleistung (für 25/45km/h)
Verschiebung Optimumspunkt:	Verschiebung, da Übersetzungen mit genutzt werden.	Nicht verschiebbar.	a) Nicht verschiebbar. b) Verschiebbar bei Motoren mit speziellen Zusatzwicklungen oder Steuerung der Polpaarzahl. c)Verschiebung, wenn Übersetzungen (z.B. spez. integr. Nabenschaltung) mit genutzt werden.	a) Nicht verschiebbar. b) Verschiebbar bei Motoren mit speziellen Zusatzwicklungen oder Steuerung der Polpaarzahl.	a) Nicht verschiebbar. b) Verschiebbar bei Motoren mit speziellen Zusatzwicklungen oder Steuerung der Polpaarzahl.
Besonderer Schutz vor Entwendung	Nur Abbau Steuerung und Akku möglich.	Nur Abbau Steuerung und Akku möglich.	Nur Abbau Steuerung und Akku möglich.	Abbau Steuerung und Akku möglich. Motor ebenfalls abbaubar. Konstruktiv Motor mit Schnellhebeln abnehmbar zu machen möglich - Alleinstellungsmerkmal dieser Technik.	Abbau Steuerung und Akku möglich. Motor ebenfalls abbaubar. Konstruktiv Motor mit Schnellhebeln abnehmbar zu machen möglich - Alleinstellungsmerkmal dieser Technik.

Leider gibt es für die Komponenten der verschiedenen Hersteller noch keine einheitliche Normierung bei der teuren Komponente Akku. Hier wäre es wünschenswert, dass es auf dem Markt nur Akkus mit 24V und 48V gäbe, wobei der 48V Akku so modular aufgebaut wäre, dass er auch als 2x24V verwendet werden könnte oder auch zwei 24V Akku als 48V Akku. Somit wäre der Akku länger versorgbar für Pedelecs oder auch bei anderen Herstellern als Zusatzakku zu verwenden.

Für die Hersteller des Felgenmotors, Reibradmotors und weiteren Startups würde ich raten ihre Komponenten untereinander austauschbar zu gestalten, das heißt Akku und Bedieneinheiten. Eine solche Standardisierung würde sich positiv auf das Käuferverhalten auswirken, da die Versorgung mit Ersatzteilen durchaus ein wichtiges Kaufkriterium darstellt. Interessant fand ich die Äußerung vieler Nutzer, die die Antriebsart des Marktführers gekauft haben, dass sie natürlich wüßten, dass sie nicht das bessere Produkt gekauft hätten, aber die Versorgbarkeit wäre besser bei Produkten die viele auch gekauft hätten, wie es auch bei Autos wäre.

10.2 Getriebeloser Mittenmotorantrieb

Von der Firma Binova gibt es einen getriebelosen Mittenmotorantrieb (binova flow) mit einem Scheibenmotor. Eine Besonderheit enthält die Steuerung, da hier auch das Tretmoment in die Steuerung mit einfließt. Dieser Antrieb bietet allerdings auch keine Rekuperation.

Der Hauptvorteil gegenüber den anderen Mittenmotoren besteht in dem Wegfall des Getriebes. Für die meisten Pedelecs mit Mittenmotor stellt eine Getriebeschaden meistens einen kapitalen Totalschaden des Pedelecs dar, da die Reparaturkosten nicht weit entfernt vom Preis eines günstigen neuen Pedelecs mit der gleichen Antriebsart liegen.

10.3 Gebrauchtmarkt für Pedelecs

Auf Grund des gestiegenen Absatzes von Pedelecs und der Marktverfügbarkeit von einigen Jahren hat sich auch ein Markt für gebraucht Pedelecs gebildet. Ratsam ist es sich diese Pedelecs vor einem Kauf gründlich anzusehen.

- Zustand des Rahmens: Bei Alu und Kohlefaser als Material ist eine Ermüdung des Materials nur schwer zu erkennen und abzuschätzen.
- Zustand des Antriebes: Bei Mittenmotoren ist der Zustand nur schwer zu erkennen und abzuschätzen.
- Zustand des Akkus: Wenn es möglich ist Vollgeladen eine lange Strecke zu fahren bis der Akku leer ist, läßt sich der Zustand des Akkus befriedigend bewerten.
- Auf Grund der Schwierigkeit den Zustand zu bewerten gibt es bereits Sachverständige für Pedelecs (Sendung BR2 vom 03.06.2015).

Für viele Räder ist ein baldig eintretender defekt des Akkus ein Schaden der für viele Pedelecs einem Totalschaden gleich kommt, da ein neuer Akku nicht mehr beschaffbar oder sehr teuer ist. Bei Herstellern von Pedelecs für die es Zusatzakkus gibt und das Rad auch nur mit dem Zusatzakku gefahren werden kann, stehen die Chancen gut auch nach einigen Jahren wieder einen Akku zu erschwinglichen Preisen zu erhalten.

Verbaut werden in den Akkupacks zwar Li-Standardzellen, aber auch dem versierten Laien sollte abgeraten werden zu versuchen selbst diese auszutauschen. Wenn es ganz schief läuft, brennt womöglich der Akkupack und verursacht noch ein Großfeuer im Gelände. Bei NiMh wäre ein Austausch der Zellen deutlich weniger kritisch.

Die meisten Hersteller von Radnabenmotoren bieten Zusatzakkus an. Radnabenmotoren ohne Getriebe haben eine lange Lebensdauer gegenüber allen anderen gängigen Antrieben. Pedelecs mit diesem Antriebstyp erscheinen mir daher am ehesten geeignet als gebrauchtes Gefährt zu erwerben.

11 Zusammenfassung

Im Hinblick auf den Verschleiß, Mitnahme der Komponenten für den Einbau in ein neues Rad, kleiner Sonderfunktionen, wie zum Beispiel Rekuperation und Wiederverkauf stellen die Hinterradnabenmotoren die hierfür geeigneteste Variante dar. Es ist schade, dass diese Antriebsart aktuell nur ein Nischendasein fristet.

Für das Nachrüsten von E-Antrieben sind sicherlich eine interessante Entwicklung der Felgenmotor und der Reibradmotor neben den Radnabenmotoren.

Bei Gelegenheit wird der Text fortgesetzt oder auch nicht.

Literaturquellen:

Quellen zur rechtlichen Einstufung der Fahrräder mit Hilfsantrieben:

http://www.pedelecforum.de/forum/index.php?threads/e-bikes-und-pedelecs-die-aktuelle-rechtslage-auf-einem-blick.20746/
http://www.jmw-online.com/elektrofahrrad-pedelec-ebike.html
http://www.pedelecforum.de/wiki/doku.php?id=rechtliches:start

Ausführungen mit Rückspeisung habe oft keinen Freilauf:

http://pedelec-elektro-fahrrad.de/technik/rekuperation-bei-pedelecs/

Formeln und physikalische Werte:

Formeln der Physik und Tabellen der Physik. Taschenbuch der Physik, Horst Kuchling (Autor), Auflage von 1988, Verlag Harri Deutsch Thun Frankfurt am Main;

Zu den Akkus:

http://www.aufs-rad.de/elektroraeder/wissenswertes-zum-antrieb-der-akkumulator.html

Fahrwiderstände:

http://de.wikipedia.org/wiki/Fahrwiderstand

http://lustaufzukunft.de/pivit/aero/formel.html

http://www.leifiphysik.de/themenbereiche/einfache-maschinen/lb/einfache-maschinen-physik-beim-radfahren-fahrwiderstaende-beim

http://www.leifiphysik.de/themenbereiche/einfache-maschinen/lb/physik-beim-radfahren-iv-fahrwiderstaende-beim-radfahren-0

http://www.physik.uni-wuerzburg.de/fileadmin/11010700/Didaktik/Zulassungsarbeiten/HA_1622196_Bielmeier_Carsten.pdf

http://www.kreuzotter.de/deutsch/speed.htm

http://www.3dfraesstudio.de/LUFTW.HTM

Kalorienverbrauch des Menschen:

http://www.ernaehrung.de/tipps/allgemeine_infos/ernaehr10.php

http://www.supermass.com/Wieviele-Kalorien-verbraucht-ein-Mensch-taeglich/cp/70/de

Abstand GPS-Punkte:

http://www.kompf.de/gps/distcalc.html

Vergleich von Pedelecs:

http://extraenergy.org/main.php

Technik der Antriebe, Motoren und Zubehör:

http://elfkw.at/technik/motoren

Script mit Grundlagen, Versuchen und Aufgaben (PDF) - Carl-Engler, Otto Bubbers, ces.karlsruhe.de, Elektromobilitaet_TGJ14:

http://ces.karlsruhe.de/~BUB/Umwelttechnik/Elektromobilitaet_TGJ14_2012.pdf

Artikel aus 2012 (nicht alles wird so mitgetragen):
http://e-bike-test.org/ebike-kaufberatung/energieruckgewinnung-rekuperation-ebikes/
http://www.adfc-bo.de/pedelec2012.htm

Interessante Entwicklung und Produkt für die Nachrüstung:
http://www.velogical-engineering.com/home-en
http://www.velogical-engineering.com/
http://www.ebike-news.de/velospeeder-leichtester-e-bike-nachruestsatz-fuer-fahrraeder-mit-16-kg-und-600-watt/7348/
http://www.ingenieur.de/Themen/Fahrrad/Der-leichte-Velospeeder-bringt-elektrischen-Rueckenwind-ans-Fahrrad

1,6 kg elektrische Einheit/Nachrüstsatz; Akku 92Wh, 35km, 0,8-0,9kg; Motor mit Elektronik 0,7-0,8kg, Moment 40 Nm, 70km 2x Standard-Akku oder 1x Großakku 1,4 kg, 313Wh, 14,5Ah, 21,6V; Wartungsfreiheit (inzwischen bei ca. 4000 km)

Und noch einen anderen Antrieb fürs Pedelec habe ich gefunden.
Nach dem beidseitigen Felgenmotor Velospeeder von Velogical in Köln, gibt es von einer Firma in Österreich bei/in Villach noch einen Reibradantrieb.
http://www.add-e.at/
http://pedelec-elektro-fahrrad.de/news/add-e-unsichtbarer-ebike-antrieb-zum-nachruesten/

Akku 1,6 kg 6Ah 50km, Einbausatz 0,2 kg, Motor 1kg, Ladegerät 0,6 kg,

Interessanter Thread:
http://www.pedelecforum.de/forum/index.php?threads/1-kg-umbausatz.33817/

Getriebeloser Mittenmotorantrieb:
https://www.inside-ebike.com/binova-flow-vom-fahrrad-zum-ebike-45-minuten/

Getriebeloser Mittelmotor, Motorunterstützung bis 25 km/h, max. Drehmoment 60 Nm
Gewicht der Antriebseinheit 6 kg, Akkukabel + Steckverbinder für Speedsensor, Display und Tretlager, Steuerung im EnergyBus

Viele verschiedene Nachrüstsätze für Pedelecs:
https://www.inside-ebike.com/tag/nachruest-kit/

Interessanter Artikel zur Helmpflicht:
http://fahrradzukunft.de/14/helmpflicht-nein-danke/

Leistung bzw. Kraftaufwand von Radnabendynamos im Leerlauf und Betrieb:

http://fahrradzukunft.de/14/neue-nabendynamos-im-test/